الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية

المركز الوطني للمتميزين

مشروع في مادة الرياضيات بعنوان :

المجاميع الرقمية واستخداماتها في الرياضيات

إعداد الطلاب :

رعد نصر

عمار حسين

إشراف المدرس :

حبيب عيسى

للعام الدراسي : 2015/2014

الفهرس:

الفهرس...2
المقدمة والأهداف...3
مفهوم المجموع الرقمي...4
بعض خواص المجاميع الرقمية..8
تعريف المجموعة Q_E 16
المصفوفة..18
تبسيط السلسلة...20
استخدام المجاميع الرقمية في حل المعادلات (جزئيا)...............21
استخدام المجاميع الرقمية في إثبات صحة المتطابقات.........................24
العلاقة بين المجاميع الرقمية وباقي القسمة بالقياس 9........................26
العددان المترافقان...31
خاصية الأعداد بالأس m...33
تطبيق على الأعداد الأولية...36
حساب المجموع الرقمي بلغة البرمجة...37
الخاتمة والاستنتاجات والمراجع...46

المقدمة :

بسم الله ..لطالما احتاج الإنسان إلى الأدوات لكي ينمو و يتطور في كل المجالات .. و في مجال الرياضيات ، تطلب وجود بعض الأدوات و التي تشكل أساس هذا العلم ، وهي طريقة التعبير عن مشكلاته وأفكاره ، الوسيلة التي نقلت المجرد الجاف إلى الحيز العملي و التطبيقي و الأكثر متعة ...

إنها و بلا شك الأرقام التي بفضلها بدأ الإنسان بفهم الرياضيات واستخدامها كأداة في حياته ، و عليها استطاع أن يبني أساس باقي العلوم من فيزياء و كيمياء و فلك .. التي تطرقت إلى حياته بأشكال عدة..

و تكثر استخدامات الأرقام ، إذ يعتمد عليها نظام حياتنا اليومي بشكل هائل .. من كونها أرقاما للهواتف و الشوارع ، مرورا بعمليات التشفير و الترميز في الحاسب ، وصولا إلى التعبير عن الأعداد و الكميات ، و استخدامها في المجالات الرياضية ، و من هنا يبدأ هذا المشروع إذ سنبدأ بالنظر للأرقام من زاوية أخرى ، و سنستعملها في بعض الاستخدامات الرياضية المألوفة ..

أهداف المشروع :

سنبدأ بتعريف مفهوم جديد : (المجاميع الرقمية) ثم نذكر تطبيقاته و فوائده و مستخدمين في ذلك اللغة التي تخاطب العقل و تحاكي التفكير الاستنتاجي و التسلسلي و هي تقترب من اللغة الرياضية في وضع الفرضيات و البراهين و الاحتمالات وعرض المناقشات الرياضية و المنطقية ، و رغم ذلك فإنها تبتعد عن طريقة العرض الجافة مدعمة بالأمثلة على كل فكرة و متناولة أسلوب الحكم المنطقي في غالب الحين ، ثم في النهاية نتطرق للبرمجة بعرض بعض البرامج البسيطة التي لها ارتباط بمفهوم المجموع الرقمي الذي هو لب هذا المشروع ..

و الهدف الرئيسي من المشروع هو فتح نافذة جديدة في الرياضيات ، مستخدمين فيها الأرقام (وهي الواحدات الأساسية) و النظر من زاوية أخرى إلى طرق حل المشكلات والمعادلات الرياضية و إبداع بعض الطرائق الجديدة البسيطة ..

وكذلك يهدف المشروع إلى الابتعاد عن النظرة التقليدية للرياضيات و الميل إلى الابتكار و تشغيل الفكر الرياضي..

مفهوم المجموع الرقمي :

يعرف المجموع الرقمي لعدد x بأنه آخر ناتج عملية جمع لأرقام خانات العدد x ..

و نرمز للمجموع الرقمي للعدد x بوضعه بين قوسين ( ) على الشكل (x) ..

ونطرح هنا بعض الأمثلة :

$(23) = 5 \qquad 3 + 2 = 5$

$(71) = 8 \qquad 1 + 7 = 8$

$(103) = 4 \qquad 1 + 0 + 3 = 4$

$(57) = 3 \qquad 5 + 7 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$

$(946) = 1 \qquad 9 + 4 + 6 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$

$(5) = 5 \qquad 5 = 5$

نلاحظ أن المجموع الرقمي لعدد x هو عدد y وبما أنه ناتج آخر عملية جمع ، سينتمي y إلى المجموعة S :

$$y \in S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$$

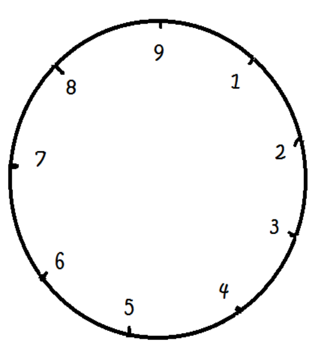
و بذا يكون كل عدد طبيعي x له مجموع رقمي ينتمي إلى المجموعة المذكورة S ..

$$\forall x \in N : (x) = y \in S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$$

والسبب في انحصار المجاميع الرقمية للأعداد بين العددين 1 و 9 يوضحه الجدول التالي حيث أنه بعد الوصول إلى عدد مجموع أرقامه 9 نلاحظ أن العدد التالي له يحمل بالتأكيد المجموع الرقمي 1 ثم 2 حتى 9 ثم 1 .. و هكذا دواليك ...

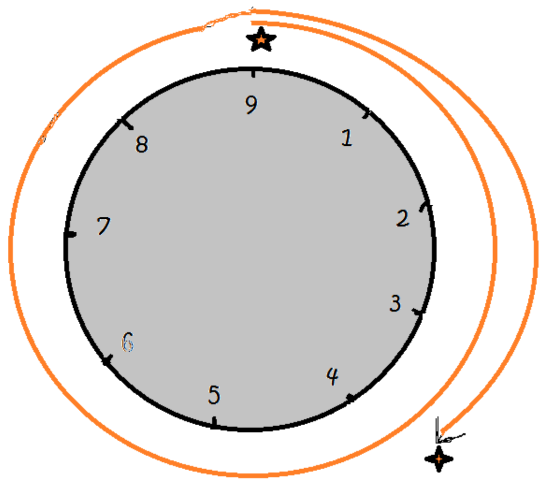
العدد	مجموعه الرقمي
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	1
11	2
12	3
13	4
14	5
15	6
16	7
17	8
18	9
19	1
20	2
21	3
22	4
23	5
24	6
25	7
26	8
27	9
28	1

وبذلك نسمي كل تكرار للمجاميع الرقمية من 1 إلى 9 بدورة واحدة وبذلك نستطيع القول بأن كل دورة تحوي مجموعة أعداد متتالية لها المجاميع الرقمية من1 إلى 9 ، و يمكن تمثيل

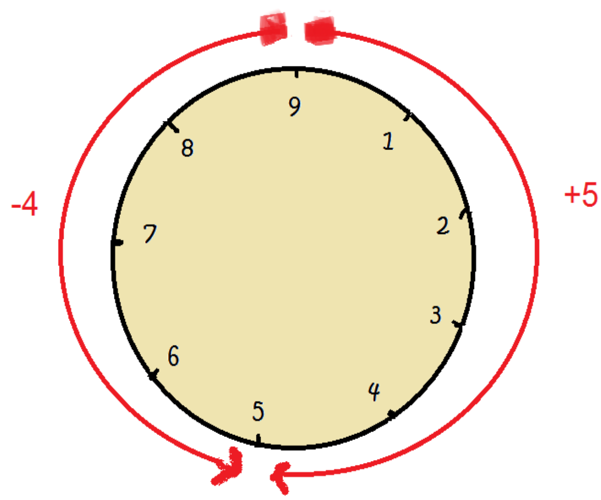


هذه الدورة على شكل الدائرة المرسومة

ويمكن منها ملاحظة أن 13+ انطلاقا من 9 ينتهي عند النقطة 4 ..



التي هي المجموع الرقمي ل 13 ..   وكذلك يمكن استنتاج خاصية أخرى حيث أن



-4 انطلاقا من 9 هي نفسها 5+ : أي يمكن أن نقول أن المجموع الرقمي للعدد السالب هو المجموع الرقمي لقيمته المطلقة مطروحا من 9 ، أمثلة :

$(-8) = (9 - |-8|) = 1$

$(-25) = 2$

$(-18) = 9$

بملاحظة السلسلة

4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
4	3	2	1	9	8	7	6	5	4

بملاحظة أن المجموع الرقمي في الأسفل و العدد في الأعلى ومن الخاصيات السابقة ، نجد أن :

$(0) = 9 \quad , \quad (-1) = 8 \quad , \quad (-2) = 7 \; \ldots\ldots.$

بعض خواص المجاميع الرقمية:

يمكن الاستفادة من المجاميع الرقمية للأعداد في التأكد من صحة بعض العمليات الحسابية البسيطة ولدينا الآن بعض الأمثلة التي توضح أهمية استخدام المجاميع الرقمية في هذا المجال :

<u>الجمع:</u>

نلاحظ من خلال الأمثلة التالية أن المجموع الرقمي لمجموع عددين هو المجموع الرقمي لناتج جمع مجموعيهما الرقميين.

أي : إذا كان $a + b = c$ فإن $((a) + (b)) = (c)$

$25 + 14 = 39$

$(7) + (5) = (3)$

$64 + 80 = 144$

$(1) + (8) = (9)$

$33 + 17 = 50$

$(6) + (8) = (5)$

ونلاحظ:

المجموع الرقمي 9 هو عنصر حيادي بالنسبة لعملية الجمع حيث أن المجموع الرقمي لناتج جمع عددين المجموع الرقمي لأحدهما 9 هو المجموع الرقمي للعدد الآخر، مثل:

$24 + 18 = 42$

$(6) + (9) = (6)$

$90 + 11 = 101$

$(9) + (2) = (2)$

25 + 45 = 70

(7) + (9) = (7)

فيما يلي كل حالات الجمع :

(1) + (1) = (2)	(1) + (2) = (3)	(1) + (3) = (4)
(1) + (4) = (5)	(1) + (5) = (6)	(1) + (6) = (7)
(1) + (7) = (8)	(1) + (8) = (9)	(1) + (9) = (1)
(2) + (2) = (4)	(2) + (3) = (5)	(2) + (4) = (6)
(2) + (5) = (7)	(2) + (6) = (8)	(2) + (7) = (9)
(2) + (8) = (1)	(2) + (9) = (2)	(3) + (3) = (6)
(3) + (4) = (7)	(3) + (5) = (8)	(3) + (6) = (9)
(3) + (7) = (1)	(3) + (8) = (2)	(3) + (9) = (3)
(4) + (4) = (8)	(4) + (5) = (9)	(4) + (6) = (1)
(4) + (7) = (1)	(4) + (8) = (3)	(4) + (9) = (4)

(5) + (5) = (1)	(5) + (6) = (2)	(5) + (7) = (3)
(5) + (8) = (4)	(5) + (9) = (5)	(6) + (6) = (3)
(6) + (7) = (4)	(6) + (8) = (5)	(6) + (9) = (6)
(7) + (7) = (5)	(7) + (8) = (6)	(7) + (9) = (7)
(8) + (8) = (7)	(8) + (9) = (8)	(9) + (9) = (9)

الطرح:

بما أن عملية الطرح بشكل عام هي عملية جمع النظير الجمعي للعدد

أي أن :

13 – 148 = 13 + (- 148) = - 135

فيمكن تحويل أية عملية طرح إلى عملية جمع

و قد ذكرنا فيما سبق أن المجموع الرقمي للعدد السالب هو المجموع الرقمي لقيمته المطلقة مطروحا من 9

مع مراعاة حالة (9 – 9 = 9) حيث أننا نعتبر أن المجموع الرقمي للعدد 0 هو 9

أي :

(-8) = 9 – (8) = 9 – 8 = 1

(-23) = 9 - (23) = 9 – 5 = 4

(-700) = 9 – (700) = 9 – 7 = 2

(-18) = 9 – (18) = (9 – 9) = 9

و هنا بعض الأمثلة :

67 – 16 = 51

(4) + (2) = (6)

70 - 142 = -72

(7) + (2) = (9)

83 - 14 = 69

(2) + (4) = (6)

(-1) = 8	(-2) = 7	(-3) = 6
(-4) = 5	(-5) = 4	(-6) = 3
(-7) = 2	(-8) = 1	(-9) = 9

و بما أن كل عملية طرح تؤول إلى عملية جمع فإن كل حالات الطرح قد ذكرت فعلا فيما سبق

الضرب:

المجموع الرقمي لجداء المجموعين الرقميين لعددين يساوي المجموع الرقمي لجداء العددين ...

إذا كان : a * b = c فإن : ((a) * (b)) = (c)

مثلاً:

11 * 13 = 143

(2) * (4) = (8)

7 * 12 = 84

(7) * (3) = (3)

14 * 80 = 1120

(5) * (8) = (4)

نلاحظ أن الرقم 9 هو عنصر ماص بالنسبة لعملية الضرب في المجاميع الرقمية فالمجموع الرقمي لناتج ضرب أي عددين المجموع الرقمي لأحدهما 9 هو 9.

مثلاً:

14 * 18 = 252

(5) * (9) = (9)

27 * 43 = 1161

(9) * (7) = (9)

36 * 53 = 1908

(9) * (8) = (9)

وفيما يلي كل حالات الضرب :

(1) * (1) = (1)	(2) * (1) = (2)	(3) * (1) = (3)
(4) * (1) = (4)	(5) * (1) =(5)	(6) * (1) = (6)
(7) * (1) = (7)	(8) * (1) = (8)	(9) * (1) = (9)
(2) * (2) = (4)	(3) * (2) = (6)	(4) * (2) = (8)
(5) * (2) = (1)	(6) * (2) = (3)	(7) * (2) = (5)
(8) * (2) = (7)	(9) * (2) = (9)	(3) * (3) = (9)
(4) * (3) = (3)	(5) * (3) = (6)	(6) * (3) = (9)
(7) * (3) = (3)	(8) * (3) = (6)	(9) * (3) = (9)
(4) * (4) = (7)	(5) * (4) = (2)	(6) * (4) = (6)
(7) * (4) = (1)	(8) * (4) = (5)	(9) * (4) = (9)
(5) * (5) = (7)	(6) * (5) = (3)	(7) * (5) = (8)

(8) * (5) = (4)	(9) * (5) = (9)	(6) * (6) = (9)
(7) * (6) = (6)	(8) * (6) = (3)	(9) * (6) = (9)
(7) * (7) = (4)	(8) * (7) = (2)	(9) * (7) = (9)
(8) * (8) = (1)	(9) * (8) = (9)	(9) * (9) = (9)

القسمة :

بالنسبة للقسمة فمن خاصية الضرب يمكن استنتاج الخاصية التالية :

المجموع الرقمي لناتج القسمة يساوي المجموع الرقمي لناتج قسمة المجموع الرقمي للمقسوم على المجموع الرقمي للمقسوم عليه ...

أي إذا كان a / b = c فإن : ((a) / (b)) = (c)

و هنا نطرح بعض الأمثلة :

$90 \div 10 = 9$

$(9) \div (1) = (9)$

$121 \div 11 = 11$

$(4) \div (2) = (2)$

$44 \div 4 = 11$

$(8) \div (4) = (2)$

ولكن...

خاصية القسمة ليست دائما صحيحة بل هي خاطئة في معظم الأحيان و يمكن استخدامها فقط في التأكد من بعض الحسابات...

أمثلة :

$10 \div 11 = 0.\overline{90}$ (عدد دوري غير منته فليس له مجموع رقمي محدد)

$(1) \div (2) = \ldots\ldots$

$46 \div 9 = 5.\overline{11}$

$(1) \div (9) = \ldots\ldots$

وفي بعض الحالات يحدث تناقض مثل:

$21 \div 3 = 7$

$(3) \div (3) = (7)$

$12 \div 3 = 4$

$(3) \div (3) = (4)$

حيث أن المجموع الرقمي للناتج لا يساوي المجموع الرقمي لناتج قسمة المجموعين الرقميين للمقسوم والمقسوم عليه

ومن هنا لا يمكن اعتماد خاصية القسمة في مجال المجاميع الرقمية إلا في حالات قليلة و واضحة ...

المجموعة Q_E :

نقوم بتعريف المجموعة Q_E وهي مجموعة الأعداد النسبية فرق الأعداد الدورية و قد عرفناها لأنه يمكن حساب المجموع الرقمي لها وفق :

إن أي عدد عشري يكتب على الشكل ($f / 10^n$) حيث :

المجموع الرقمي ل f هو $(f) = y$ والمجموع الرقمي ل 10^n هو 1 دوما :

$(1) = 1$ $(10) = 1$ $(100) = 1$

$(1000.......0) = 1 + 0 + 0 + 0 .... + 0 = 1$

وهذا يعني :

$((f) / (10^n)) = (f) = y$

و هذه خاصية هامة :

$(9.8) = (98) = 8$

$(113.56) = (11356) = 7$

أي يمكن تجاهل الفاصلة عند حساب المجموع الرقمي لعدد عشري

و تنطبق الخواص التي ذكرت سابقا على أعداد هذه المجموعة :

$78.11 + 5.9 = 84.01$

$(8) + (5) = (4)$

$5.68 + 8.1 = 13.96$

$(1) + (9) = (1)$ (9 حيادي بالنسبة لعملية الجمع)

$34.8 - 5.3 = 29.5$

$(6) + (1) = (7)$

$4.61 * 0.3 = 1.383$

$(2) * (3) = (6)$

$0.036 * 44.2 = 1.5912$

$(9) * (1) = (9)$ (9 ماص بالنسبة لعملية الضرب)

نرمز بالرمز ((p)) " حيث يأخذ p قيم الأعداد الطبيعية من 1 إلى 9 "

إلى جميع الأعداد التي مجموعها الرقمي هو p

مثال :

$23 \in ((5))$ $896.09 \in ((5))$ $5 \in ((5))$

$45 \in ((9))$ $106 \in ((7))$ $-62 \in ((1))$

المصفوفة : X (, ,)

لكل عدد ينتمي للمجموعة Q_E 9 احتمالات للمجاميع الرقمية فيكون :

المصفوفة الأساسية: X : (1,2,3,4,5,6,7,8,9)

وكل مصفوفة فيها 9 خانات فمثلاً في المصفوفة السابقة الخانة الأولى تحوي الرقم 1 و الخانة الثالثة تحوي الرقم 3 وفي المثال التالي للمصفوفة نلاحظ أن الخانة السابعة تحوي الرقم 8 ..

ومن ثم يمكن التعبير عن أي مصفوفة بتطبيق التعبير الرياضي على كل العناصر للمصفوفة الأساسية x

ويوضع في كل خانة من المصفوفة الناتجة المجموع الرقمي لناتج تطبيق ذلك التعبير لتلك الخانة ...

ونعطي بعض الأمثلة :

X + 1 : (2,3,4,5,6,7,8,9,1)

X + 13 : x + 4 (5,6,7,8,9,1,2,3,4)

5x : (5,1,6,2,7,3,8,4,9)

3x -2 : (1,4,7,1,4,7,1,4,7)

وسنذكر أهم السلاسل هنا :

2x : (2,4,6,8,1,3,5,7,9)

3x : (3,6,9,3,6,9,3,6,9)

4x : (4,8,3,7,2,6,1,5,9)

$5x$: (5,1,6,2,7,3,8,4,9)

$6x$: (6,3,9,6,3,9,6,3,9)

$7x$: (7,5,3,1,8,6,4,2,9)

$8x$: (8,7,6,5,4,3,2,1,9)

$9x$: (9,9,9,9,9,9,9,9,9)

X^2 : (1,4,9,7,7,9,4,1,9)

X^3 : (1,8,9,1,8,9,1,8,9)

X^4: (1,7,9,4,4,9,7,1,9)

X^5: (1,5,9,7,2,9,4,8,9)

X^6: (1,1,9,1,1,9,1,1,9)

و سنطرح هنا بعض الأمثلة :

$4x + 3$:

$4x$ (4,8,3,7,2,6,1,5,9)

$4x + 3$ (7,2,6,1,5,9,4,8,3)

$7 (x+1)$:

$x + 1$ (2,3,4,5,6,7,8,9,1)

$7(x+1) \quad (5,3,1,8,6,4,2,9,7)$

تبسيط السلسلة :

لدينا بعض السلاسل التي يمكن تبسيطها مثل : تذكير : القوسان يدلان على المجموع الرقمي

$(25x^2 - 7x + 55) = (7x^2 + 2x + 1)$

حيث :

$(25x^2) = (7x^2)$

إعتمادا على خاصية الضرب

$(-7x) = (2x)$

إعتمادا على نفس الخاصة السابقة

$(55) = 1$

إعتمادا على الخاصية الأساسية للمجاميع الرقمية ...

أمثلة :

$13x + 89 \equiv 4x + 8$

$413x^2 - 35 \equiv 8x^2 + 1$

$69x - 13 \equiv 6x + 5$

استخدام المجاميع الرقمية في حل المعادلات : (جزئيا)

سنبدأ بمعادلة بسيطة من الدرجة الأولى (التي تأخذ حل واحد)

نعلم بأن المعادلة $5x + 2 = 22$ يمكن حلها جبريا ولها حل واحد

لنتبع طريقة جديدة : (من زاوية أخرى)

نعرف مصفوفة أولى تحوي القيم الناتجة عن التعبيرات الخاصة بالطرف الأول 5x+2

و نعرف مصفوفة ثانية للطرف الثاني 22

(نلاحظ أنه يمكن تبسيط المصفوفة الثانية) $22 \equiv 4$

المصفوفة الأولى :

5x (5,1,6,2,7,3,8,4,9)

***5x+2 (7,3,8,4,9,5,1,6,2)

المصفوفة الثانية :

***22 (4,4,4,4,4,4,4,4,4)

ثم نقارن بين المصفوفتين

(7 , 3 , 8 , 4 , 9 , 5 , 1 , 6 , 2)

(4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4)

ثم نوجد التطابقات الصحيحة (أي نرى إذا كانت قيمة الخانة الأولى من المصفوفة الأولى تساوي قيمة الخانة الأولى من المصفوفة الثانية ثم نقابل الخانات الثانية والثالثة .. حتى التاسعة ، فيكون المجموع الرقمي للحل هو رقم الخانة التي تحمل نفس القيمة في المصفوفتين)

المعادلة : $2x^2 - 7x + 3 = 0$

(تبسيط للمعادلة) $2x^2 + 2x + 3 = 0$

X^2 (1,4,9,7,7,9,4,1,9)

$2x^2$ (2,8,9,5,5,9,8,2,9)

$2x$ (2,4,6,8,1,3,5,7,9)

$2x^2 + 2x$ (4,3,6,4,6,3,4,9,9)

(الطرف الأول) $2x^2 + 2x + 3$ (7,6,9,7,9,6,7,3,3)

(الطرف الثاني) 0 (9,9,9,9,9,9,9,9,9)

بالمقارنة بين مصفوفتي الطرفين ، نجد أن الخانات الصحيحة هي 3 و 5 ...

(وهذا صحيح ، يوجد حلان لأنها معادلة تربيعية)

أي :

$x_1 \in ((3))$ $x_2 \in ((5))$

و بالفعل الحلان هما 3 و 0.5 ...

(في المعادلات ذات الحلول الصحيحة الصغيرة نسبيا تكون طريقة المجاميع الرقمية طريقة مجدية)...

لدينا المعادلة البسيطة : $9x - 1 = 5x + 7$

$L_1 = 9x - 1$ $L_2 = 5x + 7$

$9x \quad (9,9,9,9,9,9,9,9,9)$

$9x - 1 \quad (8,8,8,8,8,8,8,8,8)$ *1

$5x \quad (5,1,6,2,7,3,8,4,9)$

$5x + 7 \quad (3,8,4,9,5,1,6,2,7)$ *2

بالمقارنة بين المصفوفتين نجد أن التطابق الصحيح في الخانة الثانية ، أي :

$X \in ((2))$

ومن الواضح أن الحل هو 2 ...

لدينا المعادلة $2 x^2 = 20 x$

$L_1 = 2 x^2$ $L_2 = 20 x \equiv 2 x$

$X^2 \quad (1,4,9,7,7,9,4,1,9)$

$2 x^2 \quad (2,8,9,6,6,9,8,2,9)$ *1

$2 x \quad (2,4,6,8,1,3,5,7,9)$ *2

بإيجاد التطابقات الصحيحة نجد :

$X_1 \in ((\ 1\ ))$ $X_2 \in ((\ 9\ ))$

و ببحث بسيط نجد أن الحلين هما - 10 10

استخدام المجاميع الرقمية في إثبات صحة المتطابقات:

يمكننا استخدام المجاميع الرقمية لإثبات صحة بعض المتطابقات :

مثلا المتطابقة : $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

بحساب المجاميع الرقمية:

$L_1 = (x - 3)^2$

$L_2 = x^2 - 6x + 9$

x	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
$x - 3$	(7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6)
$(x - 3)^2$	(4, 1, 9, 1, 4, 9, 7, 7, 9)
X^2	(1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 8)
$6x$	(6, 3, 9, 6, 3, 9, 6, 3, 9)
$x^2 - 6x + 9$	(4, 1, 9, 1, 4, 9, 7, 7, 9)

$L_2 = L_1$

المصفوفتان متساويتان ، فالمتطابقة صحيحة ...

المتطابقة : $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

$L_1 = (x+2)(x-2)$

$L_2 = x^2 - 4$

x	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
$x + 2$	(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2)
$x - 2$	(8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
$(x+2)*(x-2)$	(6, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 6, 5)
X^2	(1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9)
$x^2 - 4$	(6, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 6, 5)

$L_1 = L_2$

المصفوفتان متساويتان ، فالمتطابقة صحيحة ...

العلاقة بين المجاميع الرقمية و باقي القسمة بالقياس 9 :

يعرف باقي القسمة بالقياس x بأنه عدد صحيح موجب أكبر أو يساوي الصفر و أصغر تماما من ذلك العدد ...

وهذا يعني أن المجموع الرقمي لعدد صحيح هو نفسه باقي قسمته على 9

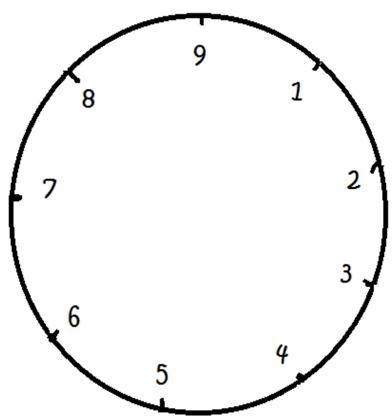
العدد	مجموعه الرقمي	باقي قسمته على 9
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	0
10	1	1
11	2	2
12	3	3
13	4	4
14	5	5
15	6	6
16	7	7
17	8	8
18	9	0
19	1	1
20	2	2
21	3	3
22	4	4
23	5	5
24	6	6

إلا في حالة أن يكون باقي القسمة هو الصفر فلا يمكن لعدد أن يكون مجموع أرقامه صفرا (باستثناء الصفر) أي عندما يكون المجموع الرقمي للعدد 9 فإن باقي قسمته على 9 هو الصفر والعكس صحيح ...

ولكن مفهوم المجموع الرقمي أشمل حيث أنه يشمل الأعداد العشرية (المنتهية)

أما الثاني فلا ...

وفي الواقع إن هذه العلاقة بين المجموع الرقمي وباقي القسمة بالقياس تتضح من الدائرة المذكورة في البداية :



حيث (بما أن الدائرة مكونة من 9 أرقام) فإننا نلاحظ أن :

1 = 0 * 9 + 1

2 = 0 * 9 + 2

10 = 1 * 9 + 1

11 = 1 * 9 + 2

$25 = 9 * 2 + 7$

وفي آخر مثال نلاحظ (إذا انطلقنا من البداية أي 9 أو 0) فإن المقدار 9 * 2 يمثل دورتين على الدائرة فكأنه عدنا إلى بداية الدائرة ثم نجمع 7 ..

فيمكن تجاهل المقدار 9*n دائما بما أنه يعود إلى بداية الدائرة ..

و مما سبق يمكن كتابة كل عدد صحيح على الشكل :

$Z = 9 * n + x$

حيث n هو عدد الدورات و x هو المجموع الرقمي لذلك العدد وهو (واضح من الصيغة)

باقي قسمة العدد على 9 ...

وبذا يتم إيضاح العلاقة ..

ويمكن بالتالي إيضاح صحة العمليات + و * :

بالنسبة لعملية الجمع :

عرفنا أن أي عدد صحيح يكتب على الشكل $9 n + x$ (مع العلم أن n أكبر عدد صحيح ممكن و x عدد صحيح موجب دوما أصغر من 9)

وعرفنا أن المجموع الرقمي لذلك العدد هو x (باستثناء الصفر مجموعه الرقمي 9)

.....

*** الحالة الأولى : مجموع المجموعين الرقميين أصغر من 9

العدد الأول : $9 * n_1 + x_1$

العدد الثاني : $9 * n_2 + x_2$

مجموع العددين : $9 * (n_1 + n_2) + (x_1 + x_2)$

أي أن المجموع الرقمي لناتج جمع العددين هو مجموع مجموعيهما الرقميين

***الحالة الثانية : مجموع المجموعين الرقميين أكبر من 9

العدد الأول : $9 * n_1 + x_1$

العدد الثاني : $9 * n_2 + x_2$

مجموع العددين : $9 * (n_1 + n_2) + (x_1 + x_2)$

ولكن : $x_1 + x_2 = 9 + x_3$

فيصبح : $9 * (n_1 + n_2 + 1) + x_3$

أي أن المجموع الرقمي للناتج هو المجموع الرقمي لناتج جمع المجموعين الرقميين للعددين

***الحالة الثالثة : مجموع المجموعين الرقميين يساوي 9

العدد الأول : $9 * n_1 + x_1$

العدد الثاني : $9 * n_2 + x_2$

مجموع العددين : $9 * (n_1 + n_2) + (x_1 + x_2)$

ولكن : $x_1 + x_2 = 9$

فيصبح : $9 * (n_1 + n_2 + 1)$

أي أن المجموع الرقمي للناتج هو 9 ..

و بذا يتم التأكيد على خاصية الجمع ...

(لا داع لإيضاح عملية الطرح لأنها عبارة عن جمع النظير ، فكل عملية طرح تؤول إلى عملية جمع)

<u>بالنسبة لعملية الضرب :</u>

العدد الأول : $9 * n_1 + x_1$

العدد الثاني : $9 * n_2 + x_2$

جداء العددين : $9 * (n_1 * n_2 + n_1 * x_2 + n_2 * x_1) + (x_1 * x_2)$

ونناقش هنا :

**إذا كان $x_1 * x_2$ أصغر أو يساوي 9 فإن المجموع الرقمي لناتج الضرب هو $x_1 * x_2$

**و إذا كان أكبر من 9 فإنه يكتب على الشكل $9n + x_3$ ويكون المجموع الرقمي للناتج هو x_3

وبذا يتم التأكيد على خاصية الضرب ...

مما سبق يمكن بسهولة استنتاج الخاصية :

خاصية : $(x + 9n) = (x)$

وذلك لأن 9n هو عبارة عن عدة دورات تعود إلى بداية الدائرة و ذلك كان تعبيرها الرياضي ...

العددان المترافقان :

نعرف أن عددين مترافقان إذا كان المجموع الرقمي لناتج جمعهما يساوي 9 ..

أي يكون العددان m و n مترافقين إذا كان :

$$(m + n) = 9$$

مثال :

العددان 17 و 64 مترافقان لأن :

$$(64 + 17) = (81) = 9$$

و كذلك الأعداد : 100 و 8 ، 14 و 4 ، 3 و 6 ...

خاصية هامة للعددين المترافقين :

إذا كان d و f عددين مترافقين فإن : $(f^2) = (d^2)$

برهان الخاصية :

بما أن العددين مترافقان : $(f) + (d) = ((9))$

و منه : $(f) = ((9)) – (d)$

بتربيع الطرفين :

$$(f)^2 = (9)^2 - 2 * (9) * (d) + (d)^2$$

بأخذ المجموع الرقمي للطرفين :

$$(\quad (f)^2 \quad) = (\quad (9)^2 - 2 * (9) * (d) + (d)^2 \quad)$$

نلاحظ أن المجموع الرقمي للمقدار $(9)^2$ هو 9

وبما أن العدد 9 ماص بالنسبة لعملية الضرب فإن المجموع الرقمي للمقدار d * 9 * 2 هو 9 أيضا ..

واعتمادا على خاصية أن العدد 9 حيادي بالنسبة لعملية الجمع أي يمكن تجاهل المقدارين $(9)^2$ و $- 2 * (9) * (d)$ عند حساب المجموع الرقمي للطرف الثاني بأكمله فيكون :

$$(\quad (9)^2 - 2 * (9) * (d) + (d)^2 \quad) = (\quad (d)^2 \quad)$$

أي أصبح لدينا :

$$(\quad (f)^2 \quad) = (\quad (d)^2 \quad)$$

وبملاحظة أن :

$$(\quad (f)^2 \quad) = (\quad (f) * (f) \quad) = (\quad (f^2) \quad) = (f^2)$$

$$(\quad (d)^2 \quad) = (\quad (d) * (d) \quad) = (\quad (d^2) \quad) = (d^2)$$

أي :

$$(f^2) = (d^2)$$

وبذا يتم برهان الخاصية ...

مثال :

العددان المتتامان 4 و 5

$(4^2) = (16) = 7$ $\qquad$ $(5^2) = (25) = 7$

وبنفس طريقة البرهان (مثال توضيحي) :

$(5^2) = y$

$(5^2) = ((9 - 4)^2) = (9^2 - 2 * 9 * 4 + 4^2) = (4^2) = y$

أي : $(5^2) = (4^2) = y = 7$

خاصية الأعداد بالأس m :

إذا ضربنا المصفوفة X بنفسها نحصل على المصفوفة X^2 ونلاحظ :

X (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

X^2 (1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9)

نستنتج من مصفوفة (x^2) السابقة أن المجموع الرقمي لأي مربع كامل هو أحد الأرقام1، 4 ، 7، 9 أي أن الأعداد التي لها مجموع رقمي مغاير للأعداد السابقة أي (2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 8) هي أعداد ليس لها جذور تربيعية منتهية أما الأعداد التي لها المجموع الرقمي 1 أو 4 أو 7 أو 9 فيمكن أن يكون لها جذر تربيعي منته...

و هذا يؤدي إلى :

**كل مربع كامل يكون مجموعه الرقمي حتما أحد الأعداد (9- 7 -4 - 1) ولكن العكس ليس صحيح إذ يمكن إيجاد أعداد لها أحد المجاميع الرقمية السابقة وليست مربعات كاملة...

**أي عدد مجموعه الرقمي هو (8 - 6 - 5 - 3 - 2) هو حتماً ليس له جذر تربيعي منته...

أمثلة :

العدد 25 مربع كامل و بالفعل مجموعه الرقمي 7 ..

العدد 104 مجموعه الرقمي 5 و بالفعل ليس مربع كامل ..

العدد 13 مجموعه الرقمي 4 و ليس مربع كامل (ليس له جذر منته)..

(إذن إذا كان المجموع الرقمي 1 أو 4 أو 7 أو 9 فإنه ليس بالضرورة أن يكون العدد مربع كامل و لكن العكس صحيح دوما)..

وبنفس الطريقة وبملاحظة أن :

X^3 (1,8,9,1,8,9,1,8,9)

نجد أن أي عدد له جذر تكعيبي منته فإن مجموعه الرقمي هو 1 أو 8 أو 9 ..

والعكس ليس بالضرورة صحيح ..

و نجد أن أي عدد له المجاميع الرقمية (2,3,4,5,6,7) فهو حكما ليس له جذر تكعيبي منته..

و كذلك : X^6 (1,1,9,1,1,9,1,1,9)

و منه أي عدد له جذر من الرتبة السادسة فإن مجموعه الرقمي حكما 1 أو 9 ..

والعكس ليس بالضرورة صحيح ..

وكذلك أي عدد له مجموع رقمي غير 1 أو 9 فهو حكما ليس له جذر من الرتبة السادسة..

ونلاحظ أن ضرب المصفوفة X^6 بالمصفوفة X^2 :

X^6 (1 , 1 , 9 , 1 , 1 , 9 , 1 , 1 , 9)

X^2 (1 , 4 , 9 , 7 , 7 , 9 , 4 , 1 , 9)

X^8 (1 , 4 , 9 , 7 , 7 , 9 , 4 , 1 , 9)

نلاحظ أن الناتج هو مصفوفة X^2 نفسها ..

بضرب المصفوفة الأخيرة بالمصفوفة X فإننا نحصل على المصفوفة X^9 وفي نفس الوقت تساوي المصفوفة X^3 ..

و إذا ضربنا الأخيرة بالمصفوفة X^3 فإننا نحصل على المصفوفة X^{10} وفي نفس الوقت تساوي المصفوفة X^6 .. ثم إذا تابعنا ضرب المصفوفة الناتجة بالمصفوفة X فإننا نحصل على نتيجة ، نعبر عنها رياضيا بـ :

$$(X^{m+6n}) = (X^m)$$

حيث m و n عددان صحيحان مع : $m \geq 2$ ..

أمثلة :

$$(15^4) = (15^{4+2*6}) = (15^{18})$$

$$(7^2) = (7^8) \qquad (101^{25}) = (101^{31})$$

أما المقدار P^x :

1^x (1,1,1,1,1,1,1,1,1)

4^x (4,7,1,4,7,1,4,7,1)

7^x (7,4,1,7,4,1,7,4,1)

9^x (9,9,9,9,9,9,9,9,9)

تطبيق على الأعداد الأولية :

لقد قام عالم رياضيات قديم يدعى إيراتوستين بوضع خوارزمية بسيطة للأعداد الأولية من خلال متتاليتين هما $6n + 1$ و $6n - 1$ ولكن هاتين المتتاليتين تحويان أعداد غير أولية هي مربعات لأعداد أولية أصغر منها أو من مضاعفاتها ...

و يمكن وضع برهان بسيط لآلية وضع إيراتوستين لهذه الخوارزمية :

نقوم بإيجاد المصفوفتين $6n + 1$ و $6n - 1$:

$6n$ (6 , 3 , 9 , 6 , 3 , 9 , 6 , 3 , 9)

$6n - 1$ (5 , 2 , 8 , 5 , 2 , 8 , 5 , 2 , 8)

$6n + 1$ (7 , 4 , 1 , 7 , 4 , 1 , 7 , 4 , 1)

بملاحظة أن كلا من المصفوفتين لا تحوي المجاميع 3 أو 6 أو 9 ...

و نذكر بخاصية القابلية على العدد 3 التي تقول :

يقبل عدد ما القسمة على العدد 3 إذا كان مجموعه الرقمي 3 أو 6 أو 9 ..

وبملاحظة أن العدد $6n$ زوجي دوما ، فإن العددين $6n + 1$ و $6n - 1$ فرديان بالضرورة ..

وبهذا يكون إيراتوستين قد أبعد غالبية الأعداد غير الأولية و هي الزوجية و الأعداد التي تقبل القسمة على 3 ...

حساب المجموع الرقمي بلغة البرمجة :

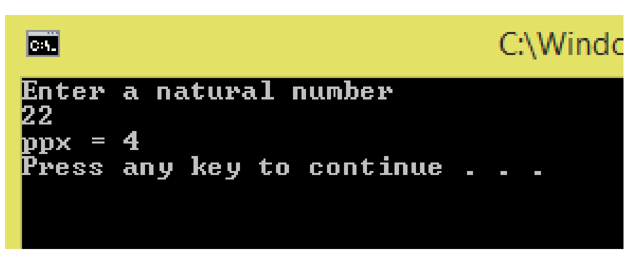
تم القيام بإعداد بعض البرامج التي تقوم بحساب المجموع الرقمي لعدد يدخله المستخدم،

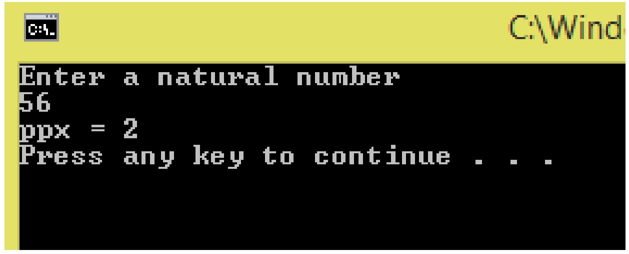
و قد تم تصميم البرامج بلغة البرمجة #c ، و تم الترميز للمجموع الرقمي النهائي فيها بالرمز ppx ...

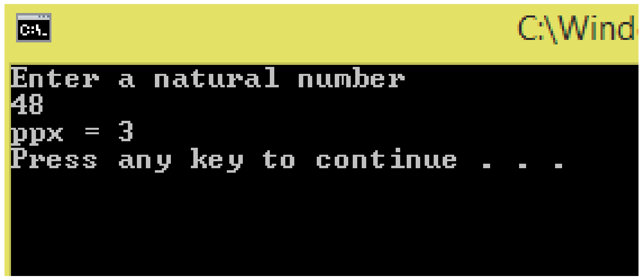
البرنامج الأول: يقوم بحساب المجموع الرقمي لعدد طبيعي يدخله المستخدم بالاعتماد على باقي القسمة بالقياس 9 الذي يكون مساويا للمجموع الرقمي.

```
static void Main(string[] args)
{
    Console.WriteLine("Enter a natural number");
    int x = int.Parse(Console.ReadLine());
    int ppx = x % 9;
    Console.WriteLine("ppx = " + ppx);
}
```

وهنا نعرض خرج البرنامج من أجل بعض القيم:



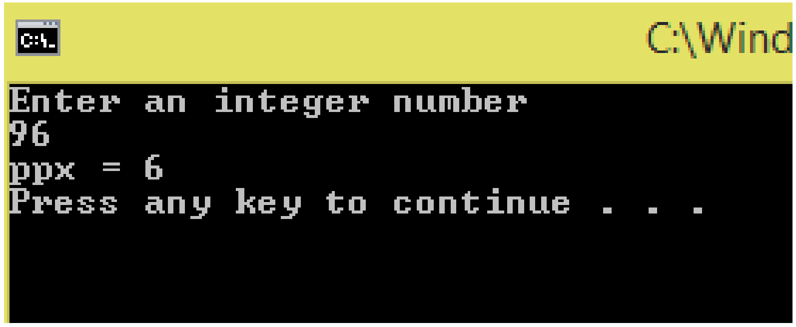


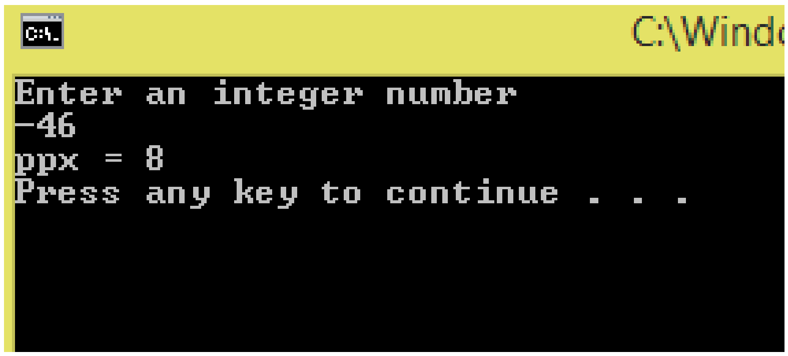


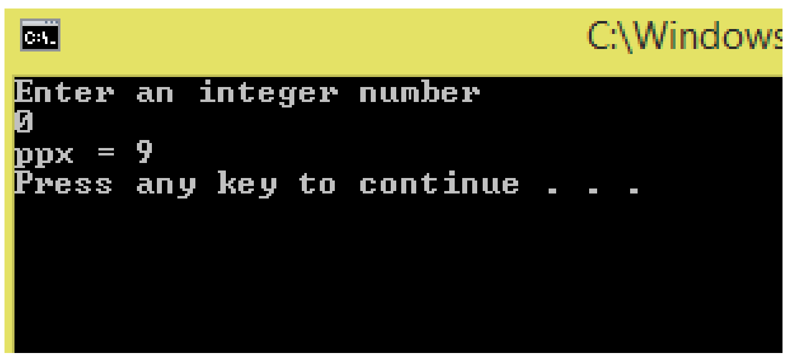
البرنامج الثاني يقوم بحساب المجموع الرقمي لعدد صحيح يدخله المستخدم:

```
public static double Ra(double x)
{
    double sum = 10, e, i = 1;
    if (x == 0)
        return 9;
    else

        for (; sum > 9; )
        {

            if (i != 1)
                x = sum;
            i++;
            sum = 0;
            for (; x != 0; )
            {
                sum += x % 10;
                e = (x - (x % 10)) / 10;
                x = e;
            }
        }

    return sum;
}

static void Main(string[] args)
{
    Console.WriteLine("Enter an integer number");
    int x = int.Parse(Console.ReadLine());
    if (x < 0)
    {
        x = -x;
        if ((9 - Ra(x)) == 0)
            Console.WriteLine("ppx = " + 9);
        else
            Console.WriteLine("ppx = " + (9 - Ra(x)));
    }
    else
        Console.WriteLine("ppx = " + Ra(x));
}
```

خرج البرنامج من أجل بعض القيم:



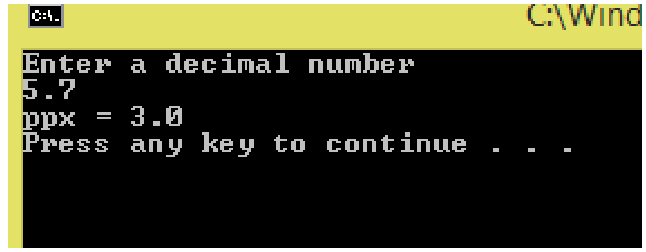


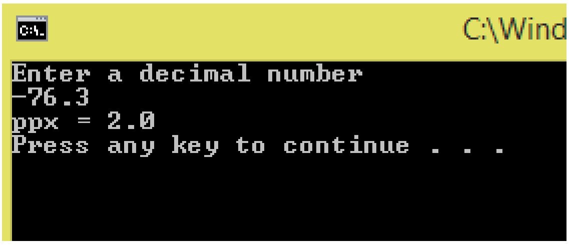


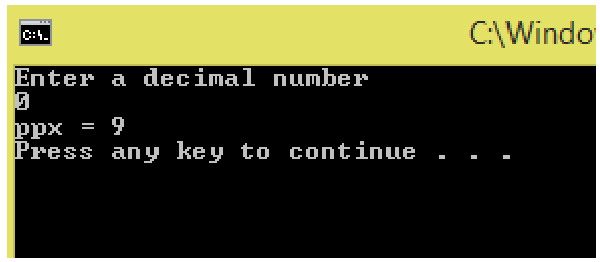
البرنامج الثالث يقوم بحساب المجموع الرقمي لعدد عشري يدخله المستخدم (أي عدد ينتمي إلى المجموعة Q_E):

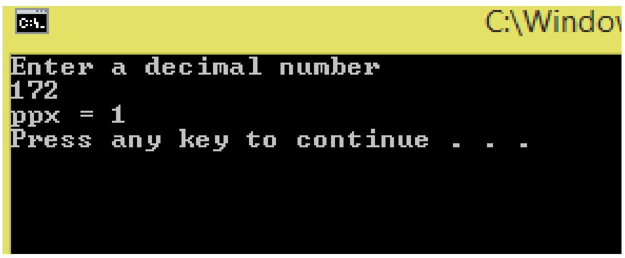
```csharp
static void Main(string[] args)
{
    Console.WriteLine("Enter a decimal number");
    decimal x = decimal.Parse(Console.ReadLine());
    decimal c = 1;
    int i = 0;
    for (; x != Math.Floor(x); i++)
        x *= 10;
    for (int s = 0; s != i; s++)
        c *= 10;
    x *= 10;


    if (x < 0)
    {
        x = -x;
        if ((9 - Ra(x)) == 0)
            Console.WriteLine("ppx = " + 9);
        else
            Console.WriteLine("ppx = " + (9 - Ra(x)));
    }
    else
        Console.WriteLine("ppx = " + Ra(x));
}


    public static decimal Ra(decimal x)
    {
        decimal sum = 10, e, i = 1;
        if (x == 0)
            return 9;
        else

            for (; sum > 9; )
            {

                if (i != 1)
                    x = sum;
                i++;
                sum = 0;
                for (; x != 0; )
                {
                    sum += x % 10;
                    e = (x - (x % 10)) / 10;
                    x = e;
                }
            }

        return sum;
    }
```

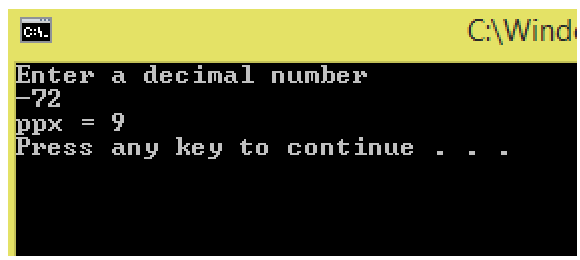
الخرج من أجل بعض القيم:









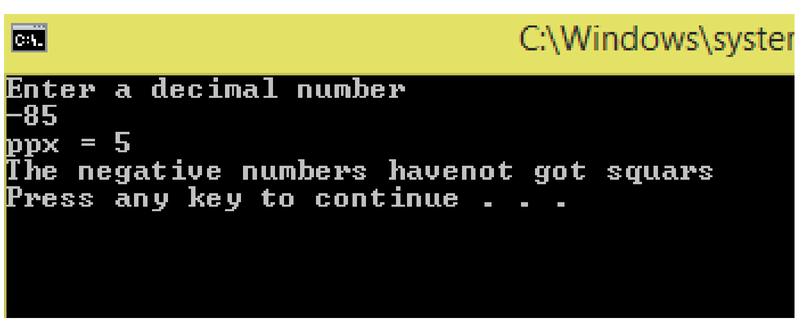


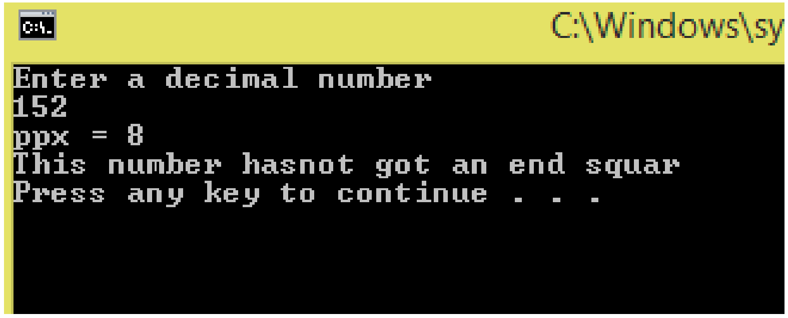
البرنامج الرابع : هو تعديل على البرنامج الثالث بإضافة بعض التعليمات حيث بعد حساب المجموع الرقمي للعدد يساعدنا البرنامج على معرفة إذا كان العدد يملك جذرا تربيعيا منتهيا أو لا فإذا كان العدد سالبا يعرض المجموع الرقمي له وينوه بأن الأعداد السالبة لا تملك جذرا تربيعيا أما إذا كان العدد موجبا فإنه يعرض المجموع الرقمي وإذا كان المجموع الرقمي هو 1 أو 4 أو 7 أو 9 فيذكر أن العدد ممكن أن يكون له جذر تربيعي منته وفي باقي الحالات أي عندما يكون مساويا 2أو 3 أو 5 أو 6أو 8 فيذكر أنه لا يمتلك جذر حتما:

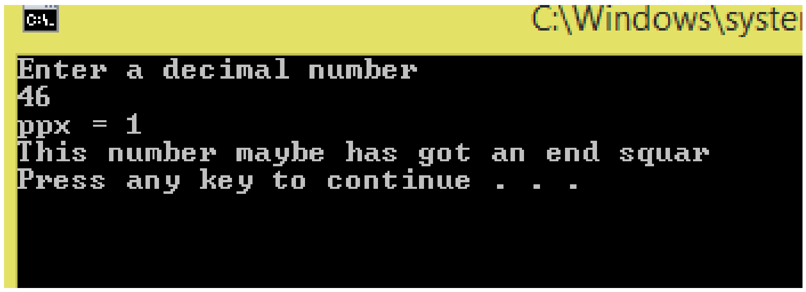
```
static void Main(string[] args)
{
    Console.WriteLine("Enter a decimal number");
    decimal x = decimal.Parse(Console.ReadLine());
    decimal c = 1,n;
    int i = 0;
    for (; x != Math.Floor(x); i++)
        x *= 10;
    for (int s = 0; s != i; s++)
        c *= 10;
    x *= 10;


    if (x < 0)
    {
        x = -x;
        if ((9 - Ra(x)) == 0)
            n = 9;
        else
            n = 9 - Ra(x);
        Console.WriteLine("ppx = " + n);
        Console.WriteLine("The negative numbers havenot got squars");
    }
    else
    {
        n = Ra(x);
        Console.WriteLine("ppx = " + n);
        if (n == 2 || n == 3 || n == 5 || n == 6 || n == 8)
            Console.WriteLine("This number hasnot got an end squar");
        else
            Console.WriteLine("This number maybe has got an end squar");
    }
}
```

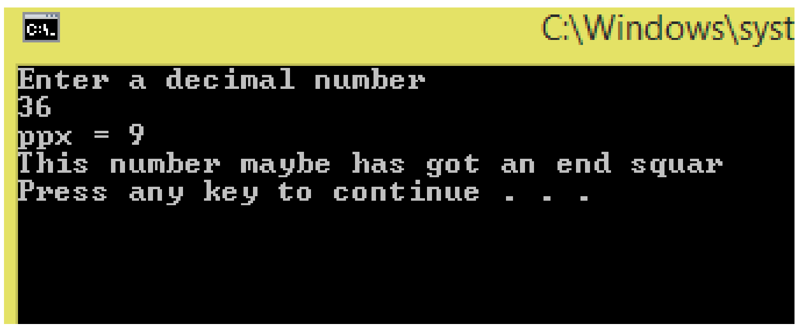
```
public static decimal Ra(decimal x)
{
    decimal sum = 10, e, i = 1;
    if (x == 0)
        return 9;
    else

        for (; sum > 9; )
        {

            if (i != 1)
                x = sum;
            i++;
            sum = 0;
            for (; x != 0; )
            {
                sum += x % 10;
                e = (x - (x % 10)) / 10;
                x = e;
            }
        }

    return sum;
}
```

خرج البرنامج عند بعض القيم:




C:\Windows\sy
Enter a decimal number
152
ppx = 8
This number hasnot got an end squar
Press any key to continue . . .


C:\Windows\syste
Enter a decimal number
46
ppx = 1
This number maybe has got an end squar
Press any key to continue . . .


C:\Windows\syst
Enter a decimal number
36
ppx = 9
This number maybe has got an end squar
Press any key to continue . . .

الخاتمة والاستنتاجات:

في النهاية نجد أن للمجاميع الرقمية تطبيقات واسعة فهي تساعد كما ذكرنا سابقاً في التأكد من صحة العمليات الحسابية المختلفة فهي تساعد التاجر مثلاً الذي يريد التأكد من صحة حساباته على التأكد منها بطريقة سريعة بدلاً من إعادة الحسابات كلها وهي تساعدنا في المسائل التي تمر معنا يومياً وذلك من خلال الخواص المختلفة التي ذكرناها،

نتمنى أن نكون قد توفقنا في فتح نافذة جديدة لتبسيط حل المعادلات والمشكلات الرياضية المختلفة التي تمر معنا دوماً وبتقديم المتعة والفائدة الكبيرة.

....

والشكر الجزيل للمركز الوطني للمتميزين أساتذةً وطلاباً الذي يوفر لطلابه البيئة العلمية والبحثية.

المراجع:

كتاب كيف تضاعف ذكائك تقوية قدراتك الذهنية وإظهار الطاقات الكامنة في عقلك (سكوت وات) مكتبة جرير.

http://mathforum.org/library/drmath/view/55926.html

http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/Digitsum.htm

ملاحظة: لم يتم الاعتماد على المصادر السابقة إلا في التأكد من بعض الخواص إنما تم الاعتماد في غالبية أجزاء المشروع على الملاحظة والاستنتاج والبرهان بالتجريب وبالطرق الرياضية المختلفة.