المركز الوطني للمتميزين

The National Centre for the Distinguished

نظرية الرواسب

وتطبيقاتها في حساب التكاملات الحقيقية

Residues Theory

تقديم: زين العابدين برهوم

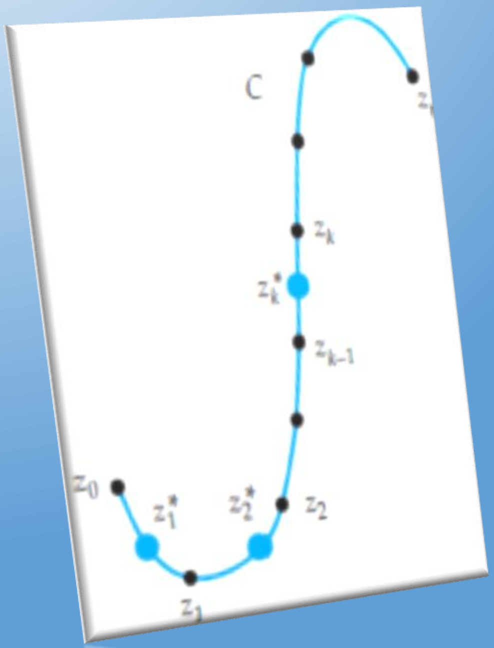
إشراف: الأستاذ عهد حسّون

لعام: 2015-2016

ملخص

يقدم هذا البحث تعريفاً بإحدى أهم النظريات في التحليل المركب وتسمى نظرية الرواسب و التي تملك العديد من التطبيقات والاستخدامات في حساب تكاملات المسار وحساب بعض التكاملات الحقيقية صعبة الحساب باستخدام التحليل الرياضي.

نظرية الرواسب ......من أهم النظريات في التحليل المركب ...... أغلب تطبيقاتها في التحليل الحقيقي !!!!



نظرية الرواسب في حساب التكاملات المركبة

وتطبيقاتها في حساب التكاملات الحقيقية

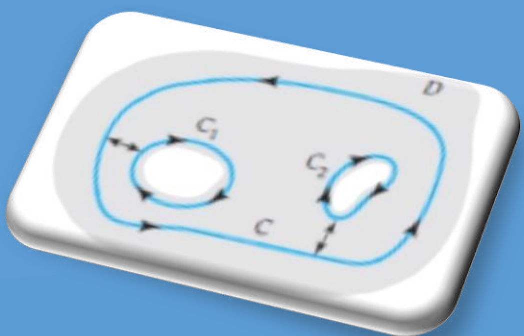
Residues Theory

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Presented By: Zein Alabdeen Barhoum

Supervisor: Ahed Hassoun

2015-2016



$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta = 2\pi i\sum_{k=0}^{n} Res(G,z_k)$$

مخطط حلقة البحث

الباب الثالث: تطبيقات نظرية كوشي في حساب التكاملات الحقيقية:

الفصل الأول: حساب التكاملات الحقيقية المثلثية

الفصل الثاني: حساب التكاملات الحقيقية الموسعة

المقدمة:

يعتبر التحليل الرياضي من أكثر فروع الرياضيات أهمية نظراً لتطبيقاته الواسعة في الحياة الواقعية، ولدينا من أقسامه التحليل المركب بتطبيقاته واستخداماته في كافة فروع الرياضيات والفيزياء والحياة اليومية، وكما في التحليل الحقيقي فإن حساب التكامل له نصيب كبير من الأهمية في التحليل المركب، ولما صعب حساب بعض أشكال التكاملات الحقيقية باستخدام التحليل الرياضي جاء دور التحليل المركب ليظهر أهميته في حساب التكاملات المركبة وذلك بظهور **نظرية الرواسب** على يد العالم كوشي التي تعد من أهم النظريات في التحليل المركب إن لم تكن الأهم, فماذا تتحدث هذه النظرية، وكيف تقوم بتحويل التكاملات الحقيقية للقيام بحسابها عن طريق التحليل المركب هذا ما سنتعرف عليه في هذا البحث....

أهداف البحث:

1. التعرف على تكاملات المسار وأبرز خواصها.
2. التعرف على أبرز المبرهنات في تكاملات المسار.
3. التعرف على السلاسل المركبة وتطبيقها في حل التكاملات المركبة.
4. الوصول إلى استنتاج نظرية الرواسب لحساب تكاملات المسار.
5. التعرف على طريقة تحويل التكاملات الحقيقية إلى تكاملات مركبة لتطبيق نظرية الرواسب.
6. تطبيق نظرية الرواسب في حساب التكاملات الحقيقية المثلثية والتكاملات الموسعة.

الباب الأول: التكامل المركب ونظرية كوشي

الفصل الأول: التكامل المركب:

1.1.1: المنحني والمسار:

تعريف 1−1: نعرف المنحني أنه تابع معرف على $\mathbb{R}$ ومستمر على مجال $[a,b]$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{C}$ ومعرف وسيطياً بالتابع:

$$z(t) = x(t) + iy(t) : a \le t \le b$$

- حيث $x(t), y(t)$ توابع مستمرة على $[a,b]$.
- مثال: التمثيل الوسيطي لدائرة الوحدة هو : $0 \le t \le 2\pi : z(t) = \cos t + i\sin t$
- نقول هن منحني أملس إذا كان $z'(t)$ مستمر وغير معدوم على $[a,b]$.
- نقول عن منحني أنه بسيط إذا كان $z(t) \ne z(t_1)$ من أجل $t \ne t_1$.
- نقول عن منحني أنه مغلق إذا كان $z(a) = z(b)$.

تعريف 1−2: نقول عن منحني C أنه مسار إذا كان منحني أملس.

2.1.1: تعريف التكامل المركب:

نظرية 1−1: (تكامل تابع مركب ذو متغير حقيقي):

إذا كان f_1, f_2 توابع حقيقية مستمرة على المجال $[a,b]$ و إذا عرفنا التابع المركب

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f(t) = f_1(t) + if_2(t); t \in [a,b]$$

فيكون تكامل هذا التابع يعطى بالعلاقة:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt$$

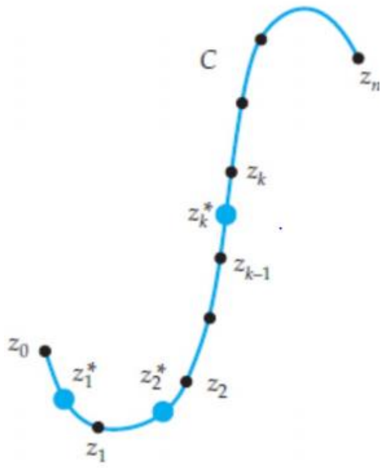
مثال:

$$\int_0^1 (2t+i)^2 dt = \int_0^1 (4t^2 - 1 + 4i)dt = \int_0^1 (4t^2 - 1)dt + i\int_0^1 (4t)dt$$

$$\int_0^1 (4t^2 - 1)dt = \frac{1}{3} \ , \ \int_0^1 (4t)dt = 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2t+i)^2 dt = \frac{1}{3} + 2i \ ,$$

تعريف 3 (تكامل تابع مركب ذو متغير مركب (تكامل المسار)):



ليكن f تابع ذو متغير z و ليكن C منحني أملس معرف وسيطياً بـ:

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

ولتكن P هي تجزئة المجال $[a,b]$ إلى n مجال من الشكل $[t_{k-1}, t_k]$ ،

حيث تقسم P المنحني P إلى n قوس $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ بواسطة النقاط $z_0, z_1, \ldots\ldots, z_n$

حيث : $z_k = x(t_k) + iy(t_k); 0 \le t \le n$

و لتكن $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ و لتكن $\|P\|$ طول أطول مجال أي أن $\|P\| = \max_{1\le k\le n} \Delta t$.

نختار من كل قوس نقطة z_k^* حيث $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$ فتكون:

$$1)\ \int_C f(z)dz = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k$$

- إذا كانت النهاية موجودة فإن التابع f يقبل المكاملة على C .
- إذا كان التابع f مستمر عند كل نقطة من C و كان C منحني أملس أو أملس جزئياً فإن النهاية موجودة و التابع يقبل المكاملة.

ملاحظة: الاسم الأكثر شهرة للتكامل المركب ذو المتغير المركب هو تكامل المسار.

3.1.1: الصيغة الأساسية لحساب تكامل المسار:

نظرية 1−2:

إذا كان f تابع مستمر على منحني أملس C معرف بتمثيله الوسيطي: $z(t) = x(t) + iy(t); a \le t \le b$

فإن تكامل المسار لهذا التابع يعطى بالعلاقة:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

البرهان:

لتكن $f(t) = u(t) + iy(t)$ و $z_k = x_k + iy_k$ و $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ و $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$ فيصبح لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k &= \sum_{k=0}^{n} (u(x_k^* + iy_k^*) + iv(x_k^* + iy_k^*))(\Delta x_k + i\Delta y_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k.\Delta x_k - v_k.\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n} (u_k.\Delta y_k + v_k.\Delta x_k)\end{aligned}$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة للمسار C:

$$\begin{aligned}\int_C f(z_k^*)\Delta z_k &= \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx\\ &= \int_a^b (u(x(t)+iy(t))x'(t) - v(x(t)+iy(t))y'(t))dt\\ &\quad + i\int_a^b (u(x(t)+iy(t))y'(t) + v(x(t)+iy(t))x'(t))dt\\ &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\end{aligned}$$

□

نظرية 1−3: إذا كان لدينا C مسار طوله L حيث L يحسب بالعلاقة $L = \int_a^b |\, z'(t) \,|\, dt$ و $|\, f(z) \,| \leq M$ فإن

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq M.L$$

مثال: جد الحد الأعلى لـ $\left|\int_C \frac{e^z}{z+1}dz\right|$ حيث C معرف وسيطياً بـ $|z| = 4$.

الحل:

1. طول المسار هو محيط دائرة نصف قطرها 4 فيكون $L = 8\pi$.
2.

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{|e^z|}{|z|-1} = \frac{|e^z|}{3}$$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow |e^z| = e^x$$

$$\max(x) = 4 \Rightarrow \max\left(|e^z|\right) = e^4$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq M = \frac{e^4}{3}$$

3. $$\left|\int_C \frac{e^z}{z+1}dz\right| \leq M.L = \frac{8\pi e^4}{3}$$

الفصل الثاني: نظرية كوشي:

1.2.1: نظرية كوشي وتعميمها (نظرية كوشي_غورسات):

تعريف 1−4 (النطاق بسيط الترابط):

نقول عن نطاق A من $\mathbb{C}$ أنه بسيط الترابط إذا كان من أجل أي منحني C أملس ومرن من A فإن كل المنطقة داخل C تكون محتواة في A .

ونقول عن نطاق أنه متعدد الترابط إذا لم يكن بسيط الترابط أي أن النطاق يحوي ثقوباً.

مثال:

النطاق $|z| < 3$ نطاق بسيط الترابط.

النطاق $1 < |z| < 2$ نطاق متعدد الترابط.

نظرية 1−4 (نظرية كوشي):

في عام 1825 أثبت العالم الفرنسي *Louis Augustin Cauchy* واحدة من أهم النظريات في التحليل العقدي سميت بنظرية كوشي وتنص النظرية.

إذا كان لدينا التابع f التحليلي على النطاق D وكان f' مستمر على D فإنه من أجل أي مسار C من D

$$\int_C f(z)dz = 0$$

البرهان:

لدينا f' مستمرة على Dومنه الجزء التخيلي والحقيقي لـ $f = u + iv$ ومشتقاتهم الجزئية مستمرة على D و تحقق معادلتي كوشي ريمان:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx \\ &= \iint_R (-v_x - u_y)dx\,dy + i\iint_R (u_x - v_y)dx\,dy \\ &= \iint_R (u_y - u_y)dx\,dy + i\iint_R (v_y - v_y)dx\,dy \\ &= \iint_R 0dx\,dy + i\iint_R 0dx\,dy = 0 \end{aligned}$$

□

في عام 1883 برهن العالم *غورسات* العلاقة السابقة بدون شرط استمرارية f' فأصحبت تسمى بمرهنة *كوشي_غورسات*

ملاحظة: إذا كانت المنطقة داخل C متعددة الترابط فإن قيمة $\int_C f(z)dz$ ليست معدومة بالضرورة.

مثال: ليكن لدينا التابع $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. ليكن C المسار $|z|=2$. نلاحظ أن المنطقة داخل C ليست بسيطة الترابط ومنه نستنتج أن $\int_{|z|=2}\dfrac{1}{z-1}dz\neq 0$.

حيث أن: $z(t)=2e^{it};0\le t\le 2\pi$ ومنه:

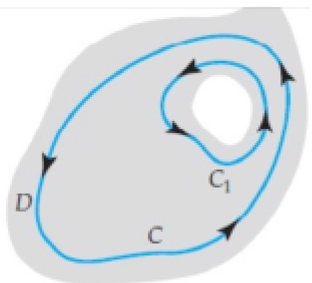
$$\int_C\frac{dz}{z-1}=\int_0^{2\pi}\frac{2ie^{it}}{2e^{it}}dt=\int_0^{2\pi}idt=2\pi i\neq 0$$

مثال: التوابع $e^z,\cos z,\sin z,p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots\dots+a_0$ توابع تحليلية على C فنستنتج أنه من أجل كل مسار C بسيط الترابط فإن:

$$\int_C e^z=\int_C\sin z=\int_C\cos z=\int_C p(z)=0$$

2.2.1: نظرية كوشي_غورسات في نطاق متعدد الترابط:

- إذا كان f تحليلي في النطاق D متعدد الترابط فلا يمكن القول أن $\int_C f(z)dz=0$ من أجل C مسار مغلق وبسيط داخل النطاق D .
- نفرض أن D نطاق مضاعف الترابط أي انه يحوي ثقباً واحداً وليكن C_1 مسار مغلق وبسيط يحوي هذا الثقب ومحتوى في C عندئذ لنأخذ المنطقة المحصورة بين C و C_1 ولتكن λ عندئذ تكون $\lambda=C-C_1$ حيث f تحليلي على λ ومنه $\int_\lambda f(z)dz=0$ ومنه نستنتج أن:



$$\int_{C-C_1}f(z)dz=0\Rightarrow\int_C f(z)dz-\int_{C_1}f(z)dz=0\Rightarrow\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz$$

- إذا كان C يحوي ثقبين وكان C_1,C_2 محتويان في C وكل منهما يحوي ثقباً وكان f تابع تحليلي على كل منهما فإن

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz$$

- لنعمم الآن المبرهنة:

نظرية 1–5: نفرض أن $C_1,C_2,\dots\dots,C_n$ نطاقات مغلقة وبسيطة ومحتواة في C ، إذا كان التابع f تحليلاً على كل المسارات $C_k;1\le k\le n$ وعلى أي نقطة خارج المسارات وداخل المسار C فإن:

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{C_k}f(z)dz$$

مثال: احسب التكامل $\int_C \frac{z}{z^2+1};C:|z|=3$:

الحل:

لدينا التابع $f(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$ تابع معرف على النطاق $|z|\le 3$ ماعدا عند النقطتين $\pm i$ (تقعان داخل C)

نفرض $C_1: i+e^{it} \quad , \quad C_2: -i+e^{it} \quad ;0\le t\le 2\pi$ حيث يقع المساران داخل C ومنه وحسب المبرهنة (5) لدينا:

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \\
&= \int_{C_1} \frac{z}{z^2+1}dz + \int_{C_2} \frac{z}{z^2+1}dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{C_1} \frac{1}{z+i}dz + \frac{1}{2}\int_{C_1} \frac{1}{z-i}dz + \frac{1}{2}\int_{C_2} \frac{1}{z+i}dz + \frac{1}{2}\int_{C_2} \frac{1}{z-i}dz
\end{aligned}$$

لدينا: $\int_{C_1} \frac{1}{z+i} = \int_{C_2} \frac{1}{z-i} = 0$ ومنه:

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \frac{1}{2}\left(\int_{C_1} \frac{1}{z-i} + \int_{C_2} \frac{1}{z+i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{i+e^{it}-i} ie^{it} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{-i+e^{it}+i} ie^{it}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\int_0^{2\pi} i\right) = \left[it\right]_0^{2\pi} = 2\pi i
\end{aligned}$$

3.2.1: صيغ نظرية كوشي التكاملية:

- **الصيغة الأولى: صيغة كوشي للتكاملات:**

نظرية 1-6:

إذا كان f تابع تحليلي في نطاق بسيط الترابط D و z_0 أي نقطة من هذا النطاق فإن:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

البرهان:

ليكن D نطاق بسيط الترابط يحوي المسار C و z_0 نقطة داخل C ولتكن C_1 دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها صغير كفاية بحيث تكون محتواة في C حيث: $C_1: z_0+re^{it}; 0\le t\le 2\pi$ ومنه $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$
$$= f(z_0)\int_{C_1} \frac{1}{z-z_0}\,dz + \int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

نعلم أن $f(z_0)\int_{C_1} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$. والآن لنحسب $\int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$:

لدينا f مستمر عند z_0 أي أنه مهما كان δ حيث $|z-z_0| < \delta$ فإنه يوجد ε حيث $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$ ، نختار نصف قطر $r = \frac{\delta}{m}$ حيث m عدد طبيعي يجعل C_1 داخل C دوماً ومنه $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{\frac{\delta}{m}}$ ولدينا طول المسار C_1 هو $L = 2\pi r = 2\pi\frac{\delta}{m}$ ومنه وحسب المبرهنة 3 فإن $\left|\int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le 2\pi\varepsilon$ ومنه

$$\int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = 0$$

ومنه:

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$
$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

- **الصيغة الثانية: صيغة كوشي للتكاملات والمشتقات:**

نظرية 1-7:

إذا كان f تابع تحليلي على نطاق D و C مسار بسيط ومغلق داخل D فإنه من أجل أي نقطة z_0 داخل المسار C فإن المشتق النوني للتابع عند تلك النقطة يعطى بالشكل:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

الباب الثاني: نظرية الرواسب

الفصل الأول: السلاسل:

1.1.2: السلاسل المركبة:

تعريف 2−1: نسمي سلسلة مركبة كل سلسلة حدودها أعداد مركبة ونرمز لها بالشكل $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k \; ; z_k \in \mathbb{C}$.

خاصية:

- نقول عن سلسلة مركبة أنها متقاربة إذا كان $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k = L$, و عدا ذلك نقول عن السلسلة أنها متباعدة.
- نقول عن سلسلة مركبة أنها متقاربة مطلقاً إذا كان $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} | z_k | = L$.
- نقول عن سلسلة أنها متقاربة شرطياً إذا كانت متقاربة ولكنها ليست متقاربة مطلقاً.

اختبارات التقارب:

1− اختبار النسبة: لتكن $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ سلسلة مركبة حدودها غير معدومة حيث $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{z_{n-1}}{z_n} \right| = L$:

- إذا كانت $L < 1$ فإن السلسلة متقاربة مطلقاً.
- إذا كانت $(L > 1) \vee (L = +\infty)$ فإن السلسلة متباعدة.
- إذا كانت $L = 1$ فلا يمكن الحكم على تقارب السلسلة أو تباعدها.
-

2− اختبار الجذر: لتكن $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ سلسلة مركبة حيث $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{| z_n |} = L$:

- إذا كانت $L < 1$ فإن السلسلة متقاربة مطلقاً.
- إذا كانت $(L > 1) \vee (L = +\infty)$ فإن السلسلة متباعدة.
- إذا كانت $L = 1$ فلا يمكن الحكم على تقارب السلسلة أو تباعدها.

2.1.2: سلاسل القوى:

تعريف 2−2: نسمي سلسلة قوى كل سلسلة من الشكل :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + ...$$

حيث $\{a_n\}$ متتالية أعداد مركبة و z_0 عدد مركب ثابت يسمى مركز سلسلة القوى.

إذا كانت النهاية $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ موجودة فإن القيمة $R=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ تسمى نصف قطر تقارب سلسلة القوى.

نطاق تقارب سلسلة القوى:

- إذا كانت $R=0$ فإن السلسلة متقاربة فقط عند $z=z_0$.
- إذا كانت $0<R<+\infty$ فإن السلسلة متقاربة في القرص $D(z_0,R)$،ومتباعدة في النطاق $\mathbb{C}-\overline{D(z_0,R)}$ ولا يمكن الحكم على تقارب أو تباعد السلسلة على الحافة $S(z_0,R)$.
- إذا كانت $R=+\infty$ فإن السلسلة متقاربة في $\mathbb{C}$.

خواص سلاسل القوى:

ليكن لدينا سلسلتي القوى $B=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k$, $A=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$ نصفي قطر تقاربهما R,r على الترتيب:

- ضرب السلسلة A بعدد ثابت c لا يؤثر على تقاربها.
- يمكن جمع السلسلتين أو طرحهما $A\pm B=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\pm b_k)(z-z_0)^k$.
- نصف قطر تقارب سلسلة القوى الناتجة عن جمع أو طرح السلسلتين هـ و $\min(R,r)$.

تفاضل وتكامل سلاسل القوى:

نظرية 2-1 (الاستمرارية):

سلسلة القوى $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$ تمثل تابع مستمر f داخل دائرة التقارب $\left|z-z_0\right|=R$ حيث يعرف التابع بالشكل:

$$f:D(z_0,R)\to\mathbb{C};f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$$

ويسمى التابع f مجموع السلسلة نقول في هذه الحالة أن f يقبل نشراً وفق سلسلة القوى أو أن سلسلة القوى ممثلة بالتابع f .

نظرية 2-2 (قابلية الاشتقاق):

سلسلة القوى $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$ قابلة للاشتقاق داخل دائرة التقارب :

$$\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dz}a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}ka_k(z-z_0)^{k-1}$$

أي أنها قابلة للاشتقاق بأي مرتبة واشتقاقها يعطي سلسلة قوى لها نفس نصف قطر التقارب.

نظرية 2−3 (تكامل سلسلة القوى):

سلسلة القوى $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ قابلة للمكاملة بالنسبة لأي مسار C داخل الدائرة $|z-z_0|=R$:

$$\int_C \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_C (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1} + const$$

3.1.2: سلاسل تايلور وماك لوران:

ليكن لدينا سلسلة القوى $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ الممثلة بالتابع f داخل النطاق $|z-z_0|=R$ حسب النظرية 2 :

$$\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots\ldots \\
f'(z) &= a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \ldots\ldots \\
f''(z) &= 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3(z-z_0) + 4\cdot 3a_4(z-z_0)^2 + \ldots. \\
f^{(3)}(z) &= 3\cdot 2\cdot 1a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(z-z_0)^2 + \ldots..
\end{aligned}$$

بوضع $z=z_0$ نلاحظ أن: $f(z_0)=a_0, f'(z_0)=1!a_1, f''(z_0)=2!a_2, \ldots, f^{(k)}(z_0)=k!a_k$ ومنه $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

بالتعويض في سلسلة القوى نجد أن:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

وتسمي هذه السلسلة سلسلة تايلور ذات المركز z_0 .

– إذا كان $z_0=0$ فإن السلسلة تصبح من الشكل $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ وتسمى سلسلة ماك لوران.

ولكن هل كل تابع تحليلي على نطاق D يمكن تمثيله بسلسلة تايلور ؟

نظرية 2−4 (نظرية تايلور):

إذا كان f تابع تحليلي في نطاق D يحوي القرص $|z-z_0|\leq R$ فيمكن نشر التابع f وفق سلسلة القوى داخل المجال $|z-z_0|<R$ بالشكل:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

البرهان:

لتكن الدائرة C ذات المركز z_0 ونصف القطر R الواقعة داخل D. ولتكن D نقطة ثابتة داخل C وليكن s متغير التكامل(يقع على C) ، بما أن f تابع تحليلي على D فإنه وحسب صيغة كوشي التكاملية الأولى:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)-(z-z_0)}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z_0}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}\right)ds$$

لدينا: $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3.....+z^{n-1}+\dfrac{z^n}{1-z}$ ، نعوض $\dfrac{z-z_0}{s-z_0}$ بدلاً من z فيصبح لدينا:

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}=1+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^2+....+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{n-1}+\frac{\left(z-z_0\right)^n}{\left(s-z\right)\left(s-z_0\right)^{n-1}}$$

ومنه:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z_0}ds+\frac{(z-z_0)}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}ds+......+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^n}ds+R_n$$

حيث: $R_n=\dfrac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^n(s-z)}ds$.

ومنه وحسب صيغة كوشي التكاملية الثانية نجد أن:

$$\begin{aligned}
f(z)&=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+.....+\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}+R_n\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+R_n
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}f(z)=f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\lim_{n\to+\infty}R_n$$

و الآن لنبرهن أن $\lim_{n\to+\infty}R_n=0$:

ليكن $\left|f(s)\right|\le M$ ولدينا $\left|s-z_0\right|=R$ ولنفرض أن $\left|z-z_0\right|=d$ إذا:

$$\left|R_n\right|=\left|\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}ds\right|\le\frac{d^n}{2\pi}\frac{M}{(R-d)R^n}2\pi R=\frac{MR}{R-d}\left(\frac{d}{R}\right)^n$$

نعلم أن $d < R$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0 \Leftarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{d}{R}\right)^n = 0$ ومنه:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

□

4.1.2: سلاسل لورانت:

تعريف 2-2: نقول عن نقطة z_0 أنها نقطة شاذة بالنسبة للتابع f إذا كان التابع غير تحليلي عند النقطة z_0 ولكنه تحليلي على أي نقطة في أي جوار يحوي z_0.

مثال: النقطتان $z = \pm 2i$ نقطتان شاذتان بالنسبة للتابع $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$.

خاصية: نقول عن نقطة شاذة z_0 أنها نقطة شاذه منعزلة إذا وجد عدد حقيقي $\rho > 0$ بحيث يكون التابع f تحليلي على النطاق الحلقي $0 <| z - z_0 |< \rho$ ، إذا لم يتحقق الشرط فإن النقطة z_0 نقطة شاذة غير منعزلة بالنسبة للتابع f .

مثال: لنقطتان $z = \pm 2i$ نقطتان شاذتان منعزلتان بالنسبة للتابع $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$ لأن التابع تحليلي على المجالين الحلقيين $0 <| z - 2i |< 1, 0 <| z + 2i |< 1$.

سلسلة لورانت:

إذا كانت z_0 نقطة شاذة بالنسبة للتابع f فلا يمكن نشر التابع f وفق سلسلة تايلور مركزها z_0 , لكن إذا كانت النقطة z_0 نقطة شاذة منعزلة فيمكن نشر التابع وفق سلسلة قوى من الشكل:

$$f(z) = ... + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + ...$$

مثال: التابع $f(z) = \frac{1}{z-1}$ لا يمكن نشره وفق سلسلة تايلور ذات المركز $z = 1$ ولكن يمكن نشره بالشكل:

$$f(z) = ... + \frac{0}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + 0 + 0(z-1) + ...$$

- يمكن كتابة منشور التابع بالشكل:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$

- السلسلة ذات القوى السالبة تسمى الجزء الرئيسي لسلسلة لورانت وتكون متقاربة على المجال $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r} \Rightarrow |z-z_0| > r$

- السلسلة ذات القوى الموجبة تسمى الجزء التحليلي لسلسلة لورانت وتكون متقاربة على المجال $|z-z_0| < R$

- سلسلة لورانت تكون متقاربة على المجال الحلقي $r < |z-z_0| < R$ ويمكن كتابة التابع f ضمن نطاق التقارب بالشكل:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$

والشكل الأخير للتابع يسمى سلسلة لورانت للتابع f على المجال الحلقي $r < |z-z_0| < R$.

نظرية 2-5 (نظرية لورانت):

إذا كان التابع f تحليلي على المجال الحلقي D المعرف بـ $r < |z-z_0| < R$ فإن f يقبل نشراً وفق سلسلة قوى من الشكل $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ حيث $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{k+1}} ds$ مع C منحني مغلق بسيط داخل D و z_0 داخله.

البرهان: لتكن الدائرتان C_1, C_2 أنصاف أقطارهما r_1, R_1 على الترتيب حيث $r < r_1 < R_1 < R$ و لتكن z نقطة ثابتة حيث $r_1 < |z-z_0| < R_1$. لدينا حسب صيغة كوشي التكاملية الأولى:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

لدينا حسب برهان نظرية تايلور:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \quad ; \quad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{k+1}} ds$$

و الآن لنحسب $-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds$ (لا نستطيع تطبيق برهان نظرية تايلور لأن النقطة z تقع خارج المسار C_1):

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{(z-z_0)-(s-z_0)} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{z-z_0}\left(1 + \frac{s-z_0}{z-z_0} + \frac{(s-z_0)^2}{(z-z_0)^2} + \ldots\ldots \frac{(s-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n-1}(s-z)}\right) ds \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{-k}(z-z_0)^{-k} + R_n
\end{aligned}$$

حيث: $a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-k+1}} ds \quad , \quad R_n = \frac{1}{2\pi i (z-z_0)^n}\int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s}(s-z_0)^n ds$.

نفرض $|z-z_0| = d > r_1$ و $|f(z)| \le M$ لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{Mr_1^{\,n}}{d-r1}\left(\frac{r_1}{d}\right)^n = 0$$

ومنه:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}\,ds = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

فيكون:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$

□

نتيجة: إذا كانت $a_{-k} = 0$ فإن الجزء الصحيح لسلسلة لورانت معدوم ومنه تصبح سلسلة لورانت سلسلة تايلور ومنه سلسلة لورانت تعد تعميم لسلسلة تايلور.

ملاحظة: إيجاد سلسلة لورانت في مجال حلقي ليس أمراً سهلاً ولكن في العديد من الحالات نجد المطلوب من خلال توظيف سلاسل القوى والسلاسل الهندسية لإيجاد المطلوب.

مثال: عين نشر التابع $f(z) = \dfrac{2}{(1-z)(z-2)}$ وفق سلسلة لورانت على كل من المجالات الحلقية التالية:

1. $|z| < 1$
2. $1 < |z| < 2$
3. $2 < |z|$
4. $|z-1| < 1$

الحل:

أولاً نلاحظ أن $f(z) = \dfrac{-2}{1-z} + \dfrac{-2}{z-2}$

1. نلاحظ أن

$$|z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

ومنه:

$$\frac{-2}{1-z} = -2\left(\frac{1}{1-z}\right) = -2\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$
$$\frac{-2}{z-2} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{2^k}$$
$$\Rightarrow f(z) = -2\sum_{k=0}^{+\infty} z^k + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k\left(-2+\frac{1}{2^k}\right)$$

2. نلاحظ أن

$$|z| < 2 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$
$$|z| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1$$

ومنه:

$$\frac{-2}{1-z} = \frac{2}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k}$$
$$\frac{-2}{z-2} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{2^k}$$
$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{z^k}$$

3. نلاحظ أن

$$|z| > 2 \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

ومنه:

$$\frac{-2}{1-z} = \frac{2}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k}$$
$$\frac{-2}{z-2} = \frac{-2}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{-2}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{z^k}$$
$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{z^{k+1}} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{k+1}}{z^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{k+1}}(2-2^{k+1})$$

1.2.2: تعريف صفر تابع مركب:

تعريف 2-3: نقول عن النقطة z_0 أنها صفر للتابع f إذا كان $f(z_0)=0$.

تعريف 2-4: نقول عن النقطة z_0 أنها صفر من الرتبة n للتابع f إذا تحقق:

$$(\forall m<n; f^{(m)}(z_0)=0)\wedge(f^{(n)}(z_0)\neq 0)$$

مثال: النقطة $z=5$ تعد صفراً من الرتبة 3 للتابع $f(z)=(z-5)^3$.

نظرية 2-6 (الصفر من الرتبة n): إذا كان التابع f تحليلي على القرص $D:|z-z_0|<R$ ، تكون النقطة z_0 صفراً من الرتبة n للتابع f إذا وجد تابع g تحليلي عند z_0 و $g(z_0)\neq 0$ وتحقق: $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$

البرهان: f تحليلي على D أي يقبل نشراً وفق سلسلة تايلور ذات المركز z_0 من الشكل:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

وبما أن z_0 صفر من الرتبة n فإنه وحسب التعريف:

$$\begin{aligned}f(z)&=a_n(z-z_0)^n+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+.....\\&=(z-z_0)^n(a_n+a_{n+1}(z-z_0)+....)\\&=(z-z_0)^n g(z)\quad;\quad g(z)=(a_n+a_{n+1}(z-z_0)+....)\end{aligned}$$

نلاحظ أن التابع g تحليلي عند z_0 و $g(z_0)=a_n\neq 0$ لأن $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$ حسب تعريف صفر تابع.

□

مثال: ليكن لدينا التابع $f(z)=z\sin z^2$ حسب سلسلة تايلور لدينا:

$$\begin{aligned}f(z)&=z\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-.....\right)\\&=z^3-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{11}}{5!}=z^3\left(1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{5!}-.....\right)=z^3g(z)\end{aligned}$$

لدينا g تحليلي عند $z=0$ و $g(0)=1\neq 0$ ومنه $z=0$ صفر من الرتبة 3 للتابع f .

2.2.2: تعريف قطب تابع مركب:

تعريف 2−5: نقول عن نقطة z_0 أنها قطب من الرتبة n للتابع f إذا كانت نقطة شاذة معزولة والجزء الرئيسي من سلسلة لورانت الممثلة للتابع f عند z_0 يحوي n حد أي أن $(\forall m \geq n \Rightarrow a_{-m} = 0 \ , \ a_{-n} \neq 0)$.

- إذا كان z_0 قطب من الدرجة الأولى يسمى قطباً بسيطاً.

نظرية 2−7:

إذا كان f تحليلي على النطاق $0 < |z - z_0| < R$ تكون z_0 قطب من الرتبة n للتابع f إذا وفقط إذا كان $f(z) = \dfrac{\Phi(z)}{(z - z_0)^n}$ حيث Φ تحليلي عند z_0 و $\Phi(z_0) \neq 0$.

البرهان: بما أن z_0 قطب من الرتبة n ل f فإنه وحسب تعريف القطب:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots\ldots + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots\ldots \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^n}\Big(a_{-n} + a_{n-1}(z-z_0) + \ldots\ldots\Big) = \frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n} \end{aligned}$$

نلاحظ أن الدالة Φ تحليلية عند z_0 و $\Phi(z_0) = a_{-n} \neq 0$ حسب تعريف القطب من الرتبة n .□

نظرية 2−8:

إذا كان التابعان h, g تحليلين عند z_0 و $g(z_0) \neq 0$ و z_0 صفر من الرتبة n للتابع h و كان $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ فإن z_0 قطب من الرتبة n للتابع f .

البرهان: z_0 صفر من الرتبة n للدالة h ومنه $h(z) = (z - z_0)^n \Phi(z)$ حيث Φ تحليلية عند z_0 و $\Phi(z_0) \neq 0$. ومنه:

$f(z) = \dfrac{\dfrac{g(z)}{\Phi(z)}}{(z - z_0)^n}$ لدينا g, Φ تحليليان عند z_0 و $g(z_0) \neq 0 \ , \ \Phi(z_0) \neq 0$ ومنه $\dfrac{g(z)}{\Phi(z)}$ تحليلي عند z_0 و $\dfrac{g(z_0)}{\Phi(z_0)} \neq 0$ ومنه z_0 قطب من الرتبة n للتابع f ,

مثال: ليكن لدينا التابع $f(z) = \dfrac{2z+5}{(z-1)(z-2)^4}$:

- لدينا $z = 1$ قطب بسيط للتابع f لأن $f(z) = \dfrac{\frac{2z-5}{(z-2)^4}}{z-1}$.

- لدينا $z = 2$ قطب من الرتبة 4 للتابع f لأن $f(z) = \dfrac{\frac{2z-5}{z-1}}{(z-2)^4}$.

3.2.2: نظرية الرواسب لحساب التكاملات المركبة:

تعريف 2-6: نسمي العامل a_{-1} في سلسلة لورانت للتابع f عند النقطة الشاذة المعزولة z_0 راسب التابع f عند z_0 ونكتب

$$a_{-1} = Res(f, z_0)$$

مثال: ليكن التابع $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ ، نشر التابع وفق سلسلة لورانت على المجال $1 < |z-1| < 2$ هو:

$$f(z) = \frac{-0.5}{(z-2)^2} + \frac{-0.25}{z-1} - 0.125 - ....$$

ومنه
$$a_{-1} = Res(f, 1) = -0.25$$

نظرية 2-9 (الراسب عند قطب بسيط):

إذا كان z_0 قطب بسيط للتابع f فإن:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$$

البرهان: z_0 قطب بسيط ومنه:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0)$$
$$f(z)(z - z_0) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + ...$$
$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = a_{-1} = Res(f, z_0)$$

□

نظرية 2-10 (الراسب عند قطب من الرتبة n):

إذا كان z_0 قطب من الرتبة n بالنسبة للتابع f فإن:

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z)$$

البرهان: بما أن z_0 قطب من الرتبة n فلدينا:

$$\begin{aligned}
&f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+.....+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+....\\
&f(z)(z-z_0)^n=a_{-n}+a_{-n+1}(z-z_0)......+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+....\\
&\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}f(z)(z-z_0)^n=(n-1)!a_{-1}+n!a_0(z-z_0).....\\
&\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}f(z)(z-z_0)^n=(n-1)!a_{-1}\\
&\Rightarrow a_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}f(z)(z-z_0)^n
\end{aligned}$$

□

- و الآن بعد أن علمنا كيف نحسب رواسب عدد ، فما أهمية حساب الرواسب في حساب قيمة التكامل؟؟؟؟

- نستطيع بشكل مباشر توظيف قيمة الرواسب لحساب تكامل المسار وقد أثبت العالم كوشي ذلك بما يسمى نظرية الرواسب التي تنص على التالي:

نظرية 2-11 (نظرية كوشي للرواسب):

إذا كانت النقاط $z_k;k\le m$ أقطاب للتابع f وكانت قيمة الراسب للتابع عند كل قطب هي $Res(f,z_k)$ فإن تكامل التابع f بالنسبة لمسار C مغلق وبسيط يقع داخله n قطب يعطى بالعلاقة:

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=0}^{n}Res(f,z_k)$$

البرهان: لتكن الدوائر $c_k;k\le n$ حيث كل دائرة تحوي قطباً ونصف قطر كل دائرة صغير كفاية كي تبقى الدوائر منفصلة عندئذ من أجل كل قطب z_k لدينا :

$$\int_{c_k} f(z)dz=2\pi iRes(f,z_k)$$

وحسب نظرية كوشي لدينا $\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{c_k} f(z)dz$ ومنه:

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{c_k} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(f,z_k)$$

□

الباب الثالث: تطبيقات نظرية الرواسب في حساب التكاملات الحقيقية

الفصل الأول: تطبيق نظرية الرواسب في حل التكاملات المثلثية:

حساب التكاملات من الشكل $\int_{0}^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)$:

نعلم أن نظرية الرواسب لا نستطيع تطبيقها إلا على تكاملات المسار، ومنه فيجب علينا تحويل التكامل الحقيقي إلى تكامل مركب لنسطيع الاستفادة ن نظرية الرواسب، ويتم ذلك بالطريقة التالية:

- سنفرض أن المسار C دائرة الوحدة $|z| = 1$ المعرفة وسيطياً بـ $z = e^{i\theta}; 0 \le \theta \le 2\pi$ إذن لدينا $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$

ومنه $d\theta = \frac{dz}{iz}$ وحسب قوانين أولر فإن :

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i}$$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta}}{2}$$

وبالتعويض نجد أن

$$\sin\theta = \frac{1}{2}(z - z^{-1})$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2i}(z + z^{-1})$$

بالتعويض في شكل التكامل نجد أن:

$$\int_{0}^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) = \int_C F\left(\frac{1}{2i}(z + z^{-1}), \frac{1}{2}(z - z^{-1})\right)\frac{dz}{iz}$$

بوضع

$$G(z) = \frac{1}{iz}F\left(\frac{1}{2i}(z + z^{-1}), \frac{1}{2}(z - z^{-1})\right)$$

ومنه نحصل على:

$$\int_{0}^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) = \int_C G(z)dz = 2\pi i\sum_{k=0}^{n} Res(G, z_k)$$

حيث z_k أقطاب تحقق $1 > |z_k|$.

مثال: احسب التكامل $d\theta$: $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2} d\theta$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2} d\theta = \int_C \frac{1}{\left(2+\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right)^2} \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{1}{\left(2+\frac{1}{2}(\frac{z^2+1}{z})\right)^2} \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i} \int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} dz$$

نفرض:
$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} = \frac{z}{(z+2-\sqrt{3})^2 (z+2+\sqrt{3})^2}$$

ومنه:

$$\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res(f, z_k)$$

أقطاب f هي: $z_1 = -2-\sqrt{3}$, $z_0 = -2+\sqrt{3}$ حيث z_0 يقع داخل C و z_1 خارجه . ومنه:

$$\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} dz = 2\pi i Res(f, z_0)$$

والآن لنحسب الراسب عند z_0 (قطب من الرتبة الثانية):

$$\begin{aligned} Res(f, z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz} (z-z_0)^2 f(z) \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-z_1)^2} \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

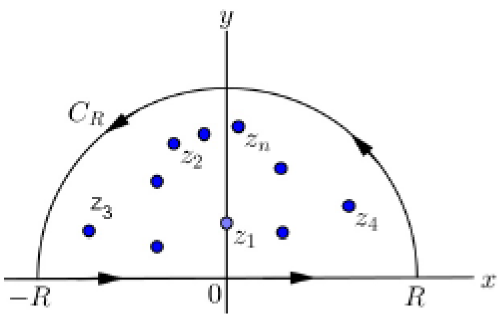
ومنه :
$$\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{6\sqrt{3}}$$

ومنه:
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2} d\theta = \frac{8\pi i}{6\sqrt{3} i} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

الفصل الثاني: تطبيق نظرية الرواسب في حل التكاملات الموسعة:

حساب التكاملات من الشكل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ حيث f لا يملك أقطاب على المحور الحقيقي:

نفرض أن $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ حيث $p(z),q(z)$ كثيرا حدود لا يملكان عوامل مشتركة و $q(z)\neq 0$ ، إن أقطاب التابع f إما أن تكون واقعة في النصف العلوي من المستوي أو في النصف السفلي ، نفرض أن النقاط $z_0, z_1, \ldots\ldots z_n$ هي الأقطاب الواقعة في النصف العلوي من المستوي أي أن $\operatorname{Im}(z)>0$.



- نأخذ المسار C المكون من نصف الدائرة C_R المعرفة بـ :

$$z=Re^{i\theta};0<\theta<\pi$$

إضافة إلى القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $R,-R$ بالاتجاه الموجب ، مع فرض أن R كبير كفاية ليحوي كل الأقطاب الموجودة في النصف العلوي كما في الشكل. حسب نظرية كوشي يصبح لدينا:

$$\int_{C_R} f(z)dz+\int_{-R}^{R} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=0}^{n} Res(f,z_k)$$

نأخذ نهاية الطرفين عندما $R\to+\infty$ فيصبح لدينا: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=0}^{n} Res(f,z_k)-\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz$.

نظرية 3-1:

إذا كانت درجة q أكبر بدرجتين من درجة p أي $d^o q\geq d^o p+2$ وكانت C_R هي نصف الدائرة المعرفة بـ

$$z=Re^{i\theta};0<\theta<2\pi$$

فإن:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$$

البرهان:

أذا فرضنا $d^o q=n$ فيوجد عدد C من $\mathbb{R}$ يحقق $|q(z)|\leq C|z|^n$ ومنه $\dfrac{1}{|q(z)|}\geq\dfrac{1}{C|z|^n}$.

وإذا فرضنا $d^o p=m$ فيوجد عدد K من $\mathbb{R}$ يحقق $|p(z)|\geq K|z|^m$.

ومنه:
$$\left|\frac{p(z)}{d(z)}\right| \le \frac{K\left|z\right|^m}{C\left|z\right|^n} = \frac{K}{C\left|z\right|^2} = \frac{K}{CR^2}$$

ولدينا طول C_R هو πR ومنه:

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le ML = \frac{K}{CR}$$

ومنه

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$$

ومنه نستنتج النظرية التالية:

نظرية 3-2:

إذا كان $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ حيث $p(z), q(z)$ كثيرا حدود لا يملكان عوامل مشتركة و $d^o q \ge d^o p + 2$ و $q(z) \neq 0; z \in \mathbb{C}$

فإن التكامل $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ يعطى بالشكل: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum\limits_{k=0}^{n} Res(f, z_k)$

حيث z_k هي أقطاب التابع في النصف العلوي من المستوي.

مثال: احسب قيمة التكامل $\int\limits_{+\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

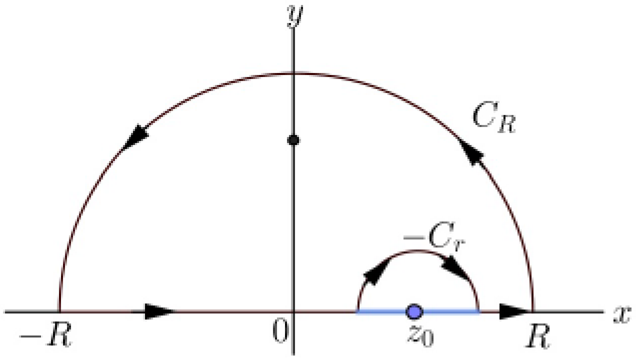
الحل:

$$\int\limits_{+\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \int\limits_{+\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \int\limits_{+\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)} = \int\limits_{+\infty}^{+\infty} f(z)dz$$

أقطاب التابع f التي تقع في النصف العلوي من المستوي هي $i, 3i$ فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}\int\limits_{+\infty}^{+\infty} f(z)dz &= 2\pi i\left(Res(f,i) + Res(f,3i)\right)\\ &= 2\pi i\left(\lim_{z\to i}(z-i)f(z) + \lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z)\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{2i\,.-2i\,.\,4i} + \frac{1}{4i\,.\,2i\,.\,6i}\right) = 2\pi i\left(\frac{-1}{16}i + \frac{1}{48}i\right) = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

حساب التكاملات من الشكل $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ حيث f يملك أقطاب على المحور الحقيقي:



لتكن $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ حيث z_0 قطب حقيقي بسيط للتابع f، نعتبر السبيل C المكون من نصف الدائرة $C_R : z = R\mathrm{e}^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi$ ونصف الدائرة $C_r : z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi$ والقطع المستقيمة $[-R, z_0 + r], [z_0 + r, R]$ كما في الشكل. ولتكن $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ أقطاب للتابع f واقعة في النصف العلوي من المستوي فيكون لدينا حسب نظرية كوشي للرواسب:

$$\int_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{-R}^{z_0 - r} f(t)dt + \int_{-C_r} f(z)dz + \int\limits_{z_0 + r}^{R} f(t)dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

بأخذ النهاية عندما $r \to 0, R \to +\infty$ يصبح لدينا:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) + \lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)dz$$

لدينا z_0 قطب حقيقي بسيط لـ f إذن f يمكن نشره وفق سلسلة لورانت من الشكل:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + g(z)$$

حيث g تحليلي عند z_0 و $a_{-1} = Res(f, z_0)$ ومنه:

$$\int_{C_r} f(z)dz = a_{-1} \int_{C_r} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_{C_r} g(z)dz = a_{-1} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta + ir \int\limits_{0}^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)dz &= \lim_{r \to 0} a_{-1} i\pi + \lim_{r \to 0} ir \int\limits_{0}^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \\ &= \pi i a_{-1} + 0 = \pi i \, Res(f, z_0) \end{aligned}$$

ومنه نستنتج النظرية التالية:

نظرية 3-3:

إذا كان $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ حيث $d^o q \geq 2 + d^o p$ و z_0 قطب حقيقي بسيط للتابع f و $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ أقطاب للتابع f تقع في النصف العلوي من المستوي $(\mathrm{Im}(z) > 0)$ يكون لدينا:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) + \pi i Res(f, z_0)$$

الخاتمة:

والآن وفي ختام هذا البحث الذي عرفنا فيه بنظرية الرواسب إحدى أهم النظريات في التحليل المركب وتطرقنا إلى بعض تطبيقاتها في حساب التكاملات الحقيقية، أوصي بإكمال هذا البحث للوصول إلى تطبيقات جديدة لهذه النظرية وإكمال الطريق في التحليل المركب لأهميته في مجالات الرياضيات كافة ودخوله في حياتنا اليومية بطريقة أو بأخرى

.... وشكراً.

المصادر والمراجع:

المصادر الأجنبية:

1. *George Cain*, "*Complex Analysis*", Georgia Institute of Technology Atlanta, Georgia (1999).
2. *Michael D. Alder*, "*An Introduction to Complex Analysis for Engineers*" (3 June 1997).
3. *K. Houston, "Complex Analysis",* (2002,2003)
4. *W W L Chen*, "*Introduction to Complex Analysis*", (1996, 2003).

المصادر العربية:

1. "*نظرية الرواسب وبعض تطبيقاتها في حساب التكاملات الحقيقية*"، الجمهورية الجزائرية، جامعة الأغواط، (2014،2015).

جدول المحتويات