Travelling salesman problem

تقديم الطالب: حسين يونس
إشراف المدرس: علي جنيدي
تاريخ: 2015/12/13

ملخص

يقدم هذا البحث مناقشة لمسألة البائع المتجول المشهورة والتي لم يعرف لها حل بكثير حدود زمني، بالإضافة إلى مقارنة بين عدة خوارزميات لحل هذه المسألة وتقديم الحل الأفضل مع إضفاء تحسينات على هذا الحل.

الفهرس

المقدمة:... 4

الباب الأول : fundamentals of TSP :... 5

الفصل الأول : TSP definition :... 5

الفصل الثاني : historical spotlights :... 6

الفصل الثالث : TSP is NP-complete:... 9

الباب الثاني : simple ALGOs to solve the TSP :........................ 11

الفصل الأول : Brute force :.. 11

الفصل الثاني : Nearest neighbor :.. 13

الفصل الثالث : Greedy :... 15

الباب الثالث : advanced ALGOs to solve the TSP :................. 16

الفصل الأول : using triangle inequality to solve the TSP :...... 16

الفصل الثاني : 2-opt ad 3-opt heuristic :.................................. 18

الفصل الثالث: genetic ALGOs : 21

النتائج : 24

الخاتمة:... 25

المصادر والمراجع :.. 26

فهرس الأشكال

شكل 1 :A TSP complete graph 7

شكل 2 : مثال توضيحي للمسألة :.. 11

شكل 3 : توضيح عمل خوارزمية الـ MST:... 17

شكل 4 : A 2-opt move: 19

شكل 5 : A 3-opt move(1): 19

شكل 6 : A 3-opt move(2): 20

شكل 7 : A 2-opt move: 21

شكل 8: كروموسوم الجيل الابتدائي: 22

المقدمة وإشكالية البحث:

افرض أنك بائع متجول في إحدى الدول، ولديك عدد من المناطق عليك زيارتها ولديك مسافة أو زمن بين كل منطقتين وتريد أن تسلك أقصر طريق ممكن يمر من كل هذه المناطق بحيث لا تمر من المنطقة نفسها مرتين لتعود في النهاية إلى المكان الذي انطلقت منه.

لنناقش ذلك قليلاً في البداية: في حال كان عدد المناطق صغير، فيمكن إيجاد الإجابة بسهولة عن طريق النظر إلى كل الطرق الممكنة واختيار الطريق الأقصر من بينها، ولكن مع تزايد عدد المناطق سوف تصبح هذه الطريقة بطيئة بشكل رهيب، فهل يا ترى هناك طريقة أفضل لفعل هذا؟ وهل يوجد خوارزمية بإمكانها إعطاء إجابة خلال فترة زمنية منطقية حتى لو كان عدد المناطق ضخم؟

علينا أولاً الوقوف عند ما تعنيه "الفترة الزمنية المنطقية":

إن الوقت الذي يلزم إي خوارزمية لتنفذ مهمتها يتعلق بعدد الخطوات التي عليها تنفيذها، على سبيل المثال، قد نجد خوارزمية تحتاج n^2 خطوة لحل المسألة من أجل n منطقة، ففي حال كان عدد المناطق 10 فإننا بحاجة لتنفيذ 100 خطوة، وإذا كان عددها 20 فإننا بحاجة لتنفيذ 400 عملية أو خطوة، لربما هذا يبدو سيئاً وطويلاً في نظركم ولكن الخوارزميات المتوفرة حالياً لحل هذه المسألة أسوأ بكثير حيث تأخذ 2^n خطوة من أجل n منطقة، وبالتالي 10 مناطق تتطلب تنفيذ 1024 خطوة و20 منطقة تتطلب تنفيذ أكثر من مليون خطوة.

لدى علماء الرياضيات صورة واضحة عن ما تعنيه الفترة الزمنية المنطقية وهي العبارات المتضمنة لكثيرات حدود لـ n، يدعى هذا النوع من الخوارزميات بصف التعقيد P.

أما الآن فبدلاً من محاولة إيجاد أقصر طريق لنحاول معرفة إذا كان يوجد هناك طريق أقصر من عدد ما وليكن d محدد مسبقاً، هذه المسألة تسمّى بنسخة القرار من البائع المتجول لأن الإجابة عليها تكون إما بـ نعم أو لا، ولا أحد يعرف أنه يوجد أيضاً خوارزمية كثير حدود زمني لحل نسخة القرار من مسألة البائع المتجول ولكن على الأقل إن قام أحدهم بإعطائك حلّ لهذه المسألة فإن التحقق من صحة هذا الحل سهل للغاية.

حيث أن مجموعة مسائل القرار التي يمكن التحقق من صحة حل ما لها بسهولة (يوجد خوارزمية كثير حدود زمني للتحقق من الحل) تسمى هذه المسائل بمسائل صف التعقيد NP.

وهذا يقودنا للأسئلة التالية:

- ***هل تنتمي مسألة البائع المتجول إلى صف التعقيد NP؟***
- ***وبالتالي هل يوجد خوارزمية كثير حدود زمني لحل مسألة البائع المتجول؟***
- ***وما هي الخوارزميات التي بإمكانها المساعدة في إيجاد حلول جيّدة لهذه المسألة؟***

الفصل الأول: لمحة تاريخية: scientists conflict

تمت الإشارة لهذه المسألة للمرة الأولى في ألمانيا عام 1832 في كتاب "البائع المتجول الناجح" وكان كارل منجر هو أول رياضي كتب عن هذه المسألة حيث أنه أراد إيجاد $l(c)$ حيث C هو مسطح بسيط في الفضاء المتري S وحسب التعريف هو:

$$l(c) = \sup \sum_{i=1}^{n-1} dist(x_i, x_{i+1})$$

عندما القيم الأفضل (supremes) نأخذها على كل اختيار $x_1, x_2, \dots\dots, x_{n-1}$ على C حسب الترتيب الذي يضعه C، وما بينه منجر لحل هذه المسألة هو أننا نستطيع أن نفحص كل المجموعات الجزئية النهائية X لـ C أي أنه:

$\exists n \in N : X \subset C, |X| = n$ وعندما نأخذ القيمة الدنيا لكل الترتيبات X، لذا عرف لكل مجموعة جزئية X لفضاء متري S: $\lambda(X)$ وهو طول المسار الأقصر الذي يُمر من خلاله، وقد برهن الآتي:

$$l(c) = \sup_X \lambda(X)$$

وعاد منجر في عام 1930 وقدم المشكلة بشكل أوضح وعدها مسألة منفصلة، واعتمد في حله على القوة الغاشمة

(brute force) الذي سأتحدث عنه لاحقاً، كما أشار في وقت لاحق إلى عدم جدوى طريقة الجار الأقرب الحدسية، وفي العام ذاته وضع وايتنر (Witner) لأول مرة المسألة تحت مسمى "travelling salesman" وفي الفترة ما بين 1950-1960 بدأت مسألة البائع المتجول تأخذ بالانتشار في الأوساط العلمية وخصوصاً في أوروبا و الولايات المتحدة الأمريكية.

وفي هذه الأثناء وعندما زادت شدة التحدي بين رواد الخوارزميات استطاع عدة باحثين منهم دانتزيك (Dantzic) وجونسون (johnson)، بطريقة البرمجة الخطية تطوير طريقة التقسيم الشجري "cutting plane"، فبهذه الطريقة الجديدة أمكن حل المشكلة وإيجاد رحلة بين 49 مدينة وأثبتوا عدم وجود رحلة أقصر منها.

في العقود اللاحقة دُرست المشكلة من العديد من الرياضيين والفيزيائيين والكيميائيين وغيرهم من العلماء،

إلى أن جاء كارب (Karp) في عام 1972 وأدرج مسألة دارة هاملتون تحت الـ NP_complete problems 21، وهذا ما أظهر للجميع صعوبة إيجاد أفضل رحلة حاسوبياً سواء بتعقيد من رتبة تابعية أو غيره.

ومن حينها بدأ العلماء يطورون الكثير من الطرق لحل المسألة بشكل مباشر مثل: الخوارزميات الجينية، والبرمجة الخطية المختلطة.

وما زالت الأبحاث تكتب حتى يومنا هذا عن مشكلة البائع المتجول والمسائل المشتقة منها.

الفصل الثاني: التعريف بالمشكلة: TSP Definition

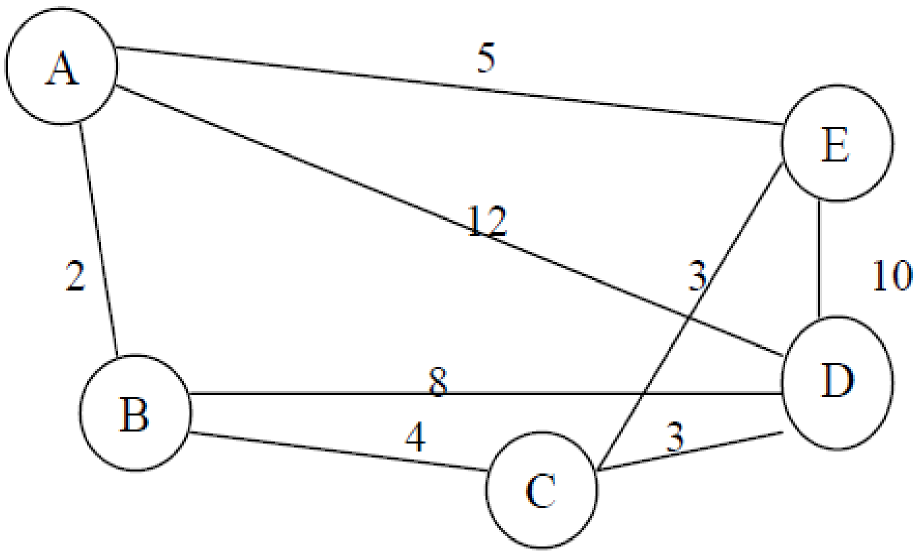
تعتبر مسألة البائع المتجول من أهم مسائل التعقيد الحسابي، وهنا نص مسألة البائع المتجول التقليدية الأساسية:

وصل تاجر إلى دولة فيها n مدينة ويريد البائع أن يزور كل مدينة في الدولة مرة واحدة فقط وبأقل وقت سفر ممكن أو أقصر مسافة ممكنة ثم يعود إلى المدينة التي بدأ منها.

وبصورة أخرى لدينا (weighted complete graph):

$$\begin{aligned}
&\text{TSP} = \{(G, f, t) : G = (V, E) \text{ a complete graph,} \\
&f \text{ is a function } V \times V \longrightarrow Z, \\
&t \in Z, \\
&G \text{ is a graph that contains a traveling salesman tour with cost that does not} \\
&\text{exceed } t\}.
\end{aligned}$$

بشكل عام يتم تمثيل المسألة بمخطط بياني رؤوسه تمثل المدن، وتمثل الأوزان المتوزعة على الحواف المسافات أو الكلف (حيث توصل الرؤوس بواسطة الحافات)، كما أن فكرة المسألة هي إيجاد أقصر دارة هاملتون في المخطط، وتعرّف دارة هاملتون بأنها جولة تمر عبر جميع رؤوس المخطط مرة واحدة فقط، وهي تسلسل (n+1) رأس متجاور حيث أن الرأس الأول من هذا التسلسل هو نفسه الرأس الأخير.



شكل 1: A TSP complete graph

مجالات استخدام مسألة البائع المتجول:

هناك العديد من الاستخدامات العلمية لهذه المسألة مثل توجيه المركبة بإضافة القيود لمسار المركبة كقدرة المركبة، وفي تقليل الخسارة ومسارات الطائرات وإيجاد المسارات المثالية للأسلاك في الدارات المطبوعة بين نقطتين على الدارة مروراً بعناصر محددة، كما استخدمت هذه المسألة في السنوات الأخيرة كقاعدة مقارنة لتحسين العديد من تقنيات المحاكاة والبحث وخوارزمية مستعمرات النمل والتفريع والتحديد وغيرها من التقنيات الأخرىً.

النموذج الرياضي لمسألة البائع المتجول:

يمكن صياغة النموذج الرياضي للمسألة على الشكل التالي:

$$\text{Minimize } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ , c_{ij} = \infty \text{ for all } i = j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \text{j}=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \text{i}=1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

$$x_{ij} = (0,1) \qquad (3)$$

حيث c_{ij} تمثل كلفة السفر من المدينة i إلى المدينة j ، وتعتبر المسألة متماثلة إذا كان $c_{ij} = c_{ji}$ أما x_{ij} فيمثل متحول القرار وهو يأخذ القيمة واحد إذا اتصلت المدينة i بالمدينة j ، وخلاف ذلك يأخذ القيمة صفر[1].

- خاصية غير الزامية للمصفوفة C وهي خاصية متباينة المثلث وتقول أن:

$$\forall i, j, k \in V, c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$$

وهذه الخاصية تتبين في مسألة البائع المتجول الإقليدية التي تكون نفيها الرؤوس نقاط في R^2 ، والأطوال بين الرؤوس أي أطوال

الأضلاع هو البعد الإقليدي أي أنه إذا كان $u = (x_1, y_1)$,$v = (x_2, y_2)$ حينها طول الضلع uv هو

.$d_{uv} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

[1]د. أحمد السبعاوي (2012) "استخدام خوارزمية التفريع والتحديد والخوارزميات الجينية في حل مسألة البائع المتجول" المجلة العراقية للعلوم الإحصائية.

الفصل الثالث: صف التعقيد NP-complete

لنحاول جعل هذه المسألة أسهل قليلاً فبدلاً من محاولة إيجاد أقصر طريق، لنحاول معرفة إذا كان يوجد طريق أقصر من عدد ما D حُدد مسبقاً، كما ذكرت سابقاً تدعى هذه المسألة مسألة القرار من البائع المتجول لأن الإجابة عليها بنعم أو لا، ولا يوجد خوارزمية كثير حدود زمني لحل نسخة القرار من البائع المتجول، ولكن على الأقل إن قام أحدهم بإعطائك حل لهذه المسألة فإن التحقق من صحة هذا الحل سهل أو يتم بتعقيد كثير حدود زمني بأقل تقدير.

حيث إن مجموعة مسائل القرار التي يمكن التحقق من صحة حل ما لها بسهولة (أي أنه يوجد خوارزمية كثير حدود زمني للتحقق من الحل) تسمى بمسائل الصف NP.

من المسائل الأخرى في هذا الصف هي مسألة كيفية تحليل أعداد ضخمة جداً إلى عواملها الأولية، على سبيل المثال لدينا:

$$2^{11} \times 5^{13} = 44926453$$

حالما تعرف الأعداد الأولية لعدد فمن السهل التحقق من صحتها، عليك فقط أن تقوم بعملية ضرب الأعداد مع بعضها وترى إن كان ضربها يطابق العدد، ولكن لا أحد يعرف أي خوارزمية كثير حدود زمني لإيجاد هذه العوامل في الأصل.

ولكن هناك مسائل من الصعب جداً إيجاد حل لها، ولكن إذا استطعنا حلها فيمكننا تطبيق هذا الحل على جميع مسائل الصف NP وهذه المسائل تسمى NP-hard.

سيكون أمر خارق جداً إذا تمكن أحد ما من إيجاد خوارزمية كثير حدود زمني لإحدى مسائل الـ NP-hard ، وسيصبح أغنى رجل في العالم لأنه حينها سيكون غير كلياً تصنيف صفوف التعقيد وتمكن من حل جميع المسائل بتعقيد كثير حدود زمني.

لكن هناك مسائل في الصف NP-hard يصعب التحقق فيها من صحة الحل أصلاً وبالتالي هذه المسائل لا تنتمي بالأصل إلى الصف NP.

لكن المجوعة التي تتضمن مسائل الـ NP-hard والـ NP في الوقت ذاته تسمى بمسائل الصف NP-complete.

وهي مجموعة المسائل التي يمكن إرجاعها إلى مسائل تشبهها وتنتمي إلى الصف NP وإذا أمكن إيجاد حل فعال لها فيمكن تطبيق هذا الحل على جميع مسائل الـ NP التي تشبهها.

حيث يمكن ترجمة كل مسألة من الصنف NP إلى أي مسألة من الصنف NP-complete. وعليه إذا وجد أحدهم حلا سريعا لمسألة واحدة من هذا الصنف فسيكون قادراً على حل جميع مسائل الصنف NP وسيكون P مساوياً لـ NP.[2]

[2] الباحثون السوريون -مسألة البائع المتجول-Travelling Salesman Problem
http://www.syr-res.com/article/6018.html

مسألة البائع المتجول تنتمي إلى الصف NP-complete:

أولاً علينا إثبات أن مسألة البائع المتجول هي مسألة NP، إذا أردنا أن نختبر إذا ما كانت الرحلة المعطاة تشكل حلاً علينا بداية أن نثبت أن هذه الرحلة تمر من كل عقدة مرة واحدة وهذا سهل، لذلك نستنتج أن مسألة دارة هاملتون هي مسألة NP حيث يوجد دالة تعقيد كثير حدود زمني لمعرفة إذا ما كان الطريق يشكل دارة هاملتون أم لا، ولكن مسألة القرار للبائع المتجول هي ليست من الصنف NP لأنه يصعب حتى التحقق من أن دارة هاملتون المعطاة تشكل أقصر طريق ممكن.

وبالتالي عند إثبات أن مسألة دارة هاملتون تترجم إلى مسألة البائع المتجول بما أن مسألة البائع المتجول أكثر صعوبة، وإذا أمكن حلها بسرعة فيمكن حل دارة هاملتون وكل المسائل المشابهة لها بسرعة أيضاً ، ونكون قد أثبتنا أن مسألة البائع المتجول هي مسألة NP_complete:

ولفعل ذلك لنفرض أنه مُعطى معنا مدخل لمسألة الدارة الهاملتونية، نريد أن نبني اختصاراً بوقت حدودي لهذه المسألة، والمدخل لهذه المسألة هو مخطط $G=(V,A)$ بحيث أن $V=\{1,2,\dots\dots,n\}$ و $A=\{(i,j)\}$

نبني مُدخل لمسألة البائع المتجول بالشكل التالي: نبني مخطط G، بحيث أن مجموعة الرؤوس هي V أما مجموعة الأضلاع هي $A'=\{(i,j):i,j=1,\dots\dots,n,i\neq j\}$ و $c_{ij}=1$ إذا كان $(i,j)\in A$ و $c_{ij}=\infty$ خلاف ذلك، وحينها المخطط G يحوي دارة هاملتون إذا وفقط إذا كانت قيمة مُدخل الـ TSP هي n.

ومنه مسألة البائع المتجول هي مسألة NP_complete.

وهذا يقودنا لسؤال أهم: هل يوجد خوارزميات كثير حدود زمني لحل مسألة الصف NP ولكنها ببساطة لم تكتشف بعد؟

هذا السؤال يعرف بمعضلة P مقابل NP وهي من أصعب المعضلات الرياضية المفتوحة، وأي شخص بإمكانه حلها سيربح جائزة قدرها مليون دولار مقدمة من معهد كلاي للرياضيات. لا يتفق الجميع بخصوص هذه المسألة ولكن معظم علماء الرياضيات يميلون للاعتقاد بأن P لا تساوي NP وهذا يعني بأنه مسائل الصف NP فعلاً صعبة للغاية ولا يمكن حلها بخوارزميات سريعة.

وبحيلة أخرى حيث أن أي مسألة من الصف NP يمكن تحويلها إلى نسخة القرار من مسألة البائع المتجول. وهذا يعني أن أي خوارزمية كما ذكرت سابقاً تحل نسخة القرار يمكن تحويلها لخوارزمية تحل أي مسألة أخرى في الصف NP. فتخيل إيجادك خوارزمية كثيرات حدود زمنية لنسخة القرار من مسألة البائع المتجول، هذا يعني أن أي مسألة من الصف NP يمكن حلها أيضاً خلال كثير حدود زمني وسوف تكون قد برهنت أن P=NP[3].

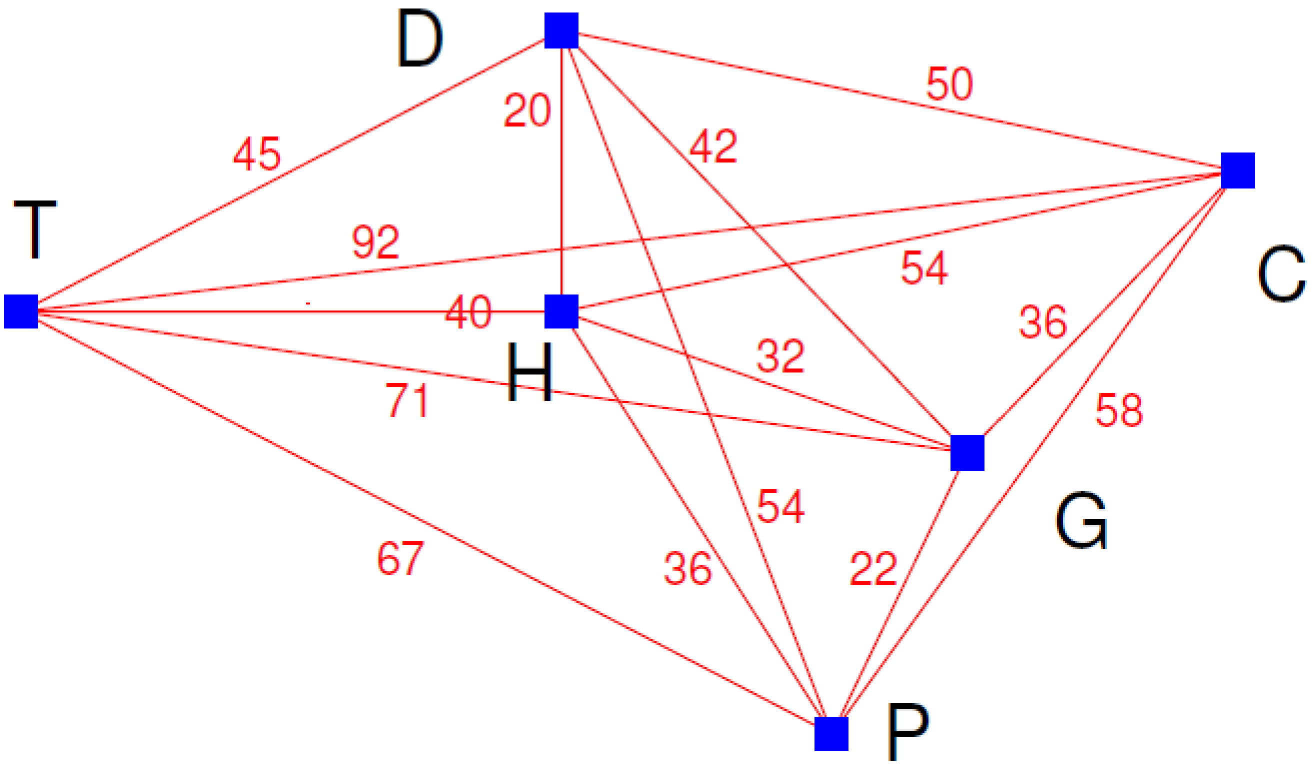
[3] Gilbert ،Laborte (1991) ، *The Traveling Salesman Problem: An overview of exact and approximate algorithms*

الفصل الأول: Brute force

تعد القوة الغاشمة من الطرق البدائية لحل المسائل حيث تعتبر الفكرة الأولى والأبسط لأي مبرمج، فعندما تعرض عليك مسألة جرب القوة الغاشمة أولاً وإن كان زمن التنفيذ كبير للغاية ابدا بتجريب خوارزميات أخرى.

تعتمد القوة الغاشمة على تجريب جميع الاحتمالات الممكنة ثم اختيار الحل الأنسب من بين هذه الاحتمالات الموجودة.

ليكن لدينا المخطط الآتي لمسألة البائع المتجول:



شكل 2: مثال توضيحي للمسألة

لدينا في المخطط التالي لدينا 6 مدن ولدينا زمن التنقل بين كل مدينتين والمطلوب هنا إيجاد دارة هاملتون وبأقصر كلفة ممكنة.

نمثل الرسم السابق بجدول ندعوه (adjmatrix) الذي يوضح بشكل أفضل الأزمنة بين المدن ليسهل التعامل معها أثناء الحل.

	H	P	G	C	D	T
Home (H)	0	36	32	54	20	40
Pet store (P)	36	0	22	58	54	67
Greenhouse (G)	32	22	0	36	42	71
Cleaners (C)	54	58	36	0	50	92
Drugstore (D)	20	54	42	50	0	45
Target (T)	40	67	71	92	45	0

بالاعتماد على توليد جميع المسارات الممكنة، يكون عدد دارات هاملتون الممكنة:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ثم نحسب الكلفة لكل دارة نولدها بجمع أوزان الحواف التي تكون الدارة، ثم نختار الكلفة الكلية الأصغر. يعتبر هذا الحل البسيط دقيقاً لأنه يقدم الجواب الصحيح دوماً لكنه سهل جداً فقط في حال كان عدد العقد صغير جداً حيث تعد القوة الغاشمة هنا غير فعالة لأن تعقيد الحل هو $O((n-1)!)$.

- إذا كان حاسوبك قادر على معالجة توليد مليون دارة هاملتون في الثانية فإنه عندما تكون:
- N تساوي 6,7,8,9 تكون الإجابة لحظية (أجزاء صغيرة من الثانية)
- N تساوي 10 تستغرق حوالي 3/1 ثانية.
- N تساوي 11 حوالي 4 ثواني.
- N تساوي 12 حوالي 40 ثانية.
- N تساوي 13 حوالي 8 دقائق.
- N تساوي 14 حوالي 2 ساعة.
- N تساوي 15 أقل بقليل من يوم.
- N تساوي 20 يستغرق حاسوبك أكثر من مليون سنة.

الفصل الثاني: Nearest neighbor

تعرف الطرائق الحدسية بأنها حالة تخمينية (حدسية) لأفضلية اختيار نقطة عن أخرى داخل الحل لبعض الأهداف أو الأجزاء من المسألة، في الغالب تستطيع الحدسيات إيجاد حلول جيدة للمسألة لكنها قد لا تكون الحلول المثلى.

وسأتطرق الآن إلى طريقة الجار الأقرب الحدسية، بينما سأتطرق لاحقاً لطرائق حدسية أكثر دقة وأكثر فاعلية.

يمكن إيجاد حل جيد لمسألة البائع المتجول بالبدء من المدينة (العقدة) المحددة، ومن ثم الربط بينها وبين المدينة الأقرب لها والتي لم تتم زيارتها من قبل، وتستمر العملية حتى تشكيل دارة هاملتون.

1. نختار مدينة عشوائية.
2. نوجد العقدة الأقرب لها والغير مزارة ونجمع كلفة الذهاب إليها.
3. هناك عقد لم تُزار بعد؟ إذا كانت الإجابة نعم، نكرر الخطوة رقم 2.
4. نعود إلى المدينة التي انطلقنا منها.

وبذلك نحصل على دارة هاملتون بـ $O(n^2)$.

تعتبر هذه الطريقة مجدية وذات كفاءة عالية لوجود مسار واحد فقط سيتم تشكيله، ولكنه قد لا يوصل إلى الهدف بصورة جيدة.

نطبق ذلك على المخطط السابق:

	H	P	G	C	D	T
Home (H)	0	36	32	54	**20**	40
Pet store (P)	36	0	22	58	54	67
Greenhouse (G)	32	22	0	36	42	71
Cleaners (C)	54	58	36	0	50	92
Drugstore (D)	20	54	42	50	0	45
Target (T)	40	67	71	92	45	0

نبدأ من المدينة H ونكمل فينتج لدينا المسار الآتي:

H, T, C, P, G, D, H.

كلفة هذه الرحلة: 274

كلفة أفضل رحلة: 229

متوسط كلفة الرحلات: 287.6

- بمقارنة هذه الخوارزمية بالقوة الغاشمة نجد أن:

القوة الغاشمة تعطي إجابة دقيقة ولكن بوقت غير منطقي.

الجار الأقرب تعطي نتائج جيد ولكن ليست دقيقة، بوقت منطقي جداً .

الفصل الثالث : Greedy algorithm

الخوارزميات الجشعة هي الخوارزميات التي تستند إلى الحدس المهني الذي يتم عن طريقه اختيار الإمكانية الأفضل المرئية في المرحلة الحالية، من دون الأخذ بالحسبان تأثير هذه الخطوة على تكملة الحل.

بشكل عام للخوارزميات الجشعة خمسة عناصر:

1. مجموعة مرشحة يتم إنشاء الحل منها.
2. اختيار الوظيفة والتي يتم من خلالها اختيار أفضل مرشح لإضافته إلى الحل.
3. الغرض من الوظيفة والتي تستخدم لتحديد ما إذا كان يمكن استخدام مرشح للمساهمة في الحل.
4. الهدف من الوظيفة والتي تحدد قيمة الحل أو حل جزئي.
5. وظيفة الحل والتي تحدد عندما نكتشف الحل الكامل.

بتطبيق الخوارزمية الجشعة على مسألة البائع المتجول نقوم ببناء المسار تدريجياً بالاختيار التدريجي للحافة الأقصر وإضافتها للرحلة التي نقوم بتشكيلها بحيث:

لا تشكل دائرة (cycle) طولها أقل من N.

لا تزيد درجة أي عقدة عن 2.

ألا نضيف نفس الحافة مرتين.

$$Greedy\ ,\ O(n^2 \log_2(n))$$

خطوات تنفيذ الخوارزمية:

1. نرتب كل الحواف.
2. نختار أقصر حافة ونضيفها إلى الرحلة بحيث لا تخل بالشروط المذكورة في الأعلى.
3. هل نملك N حافة؟ إذا كانت الإجابة لا، نكرر الخطوة رقم [4]2.

---

[4] McGeoch, D. S. J. a. L. A. (November 20, 1995). ""The travelling salesman Problem: A Case Study in Local optimization"."

الفصل الأول: Using the triangle inequality to solve the TSP

متباينة المثلث في مسألة البائع المتجول[5]:

من أجل مجموعة من العقد $a,b,c \in V$ نقبل أنه $t(a,c) \le t(a,b)+t(b,c)$ حيث t تمثل تابع الكلفة، ونقول إن t يحقق متباينة المثلث.

للاستفادة من هذه الخاصية أولاً ننشئ الشجرة التي تمر من جميع العقد مرة واحدة وبأقل كلفة والتي لا تحتوي على دوائر (minimum spanning tree) فتكون كلفة هذا المرور هي قيمة دنيا حيث أن أي دارة هاملتون هي بالتأكيد أكبر من هذه الشجرة.

وهي على الأكثر مرتين من شجرة الـ (minimum spanning tree).

وسنستخدم خوارزمية MST-Prim لإيجاد الـ (minimum spanning tree).

تطبيق خوارزمية متباينة المثلث:

Input: A complete graph G (V, E)

Output: A Hamiltonian cycle

1. نختار عقدة بداية (Root) لتشكيل الـ (minimum spanning tree) بحيث:

$$r \in V[G]$$

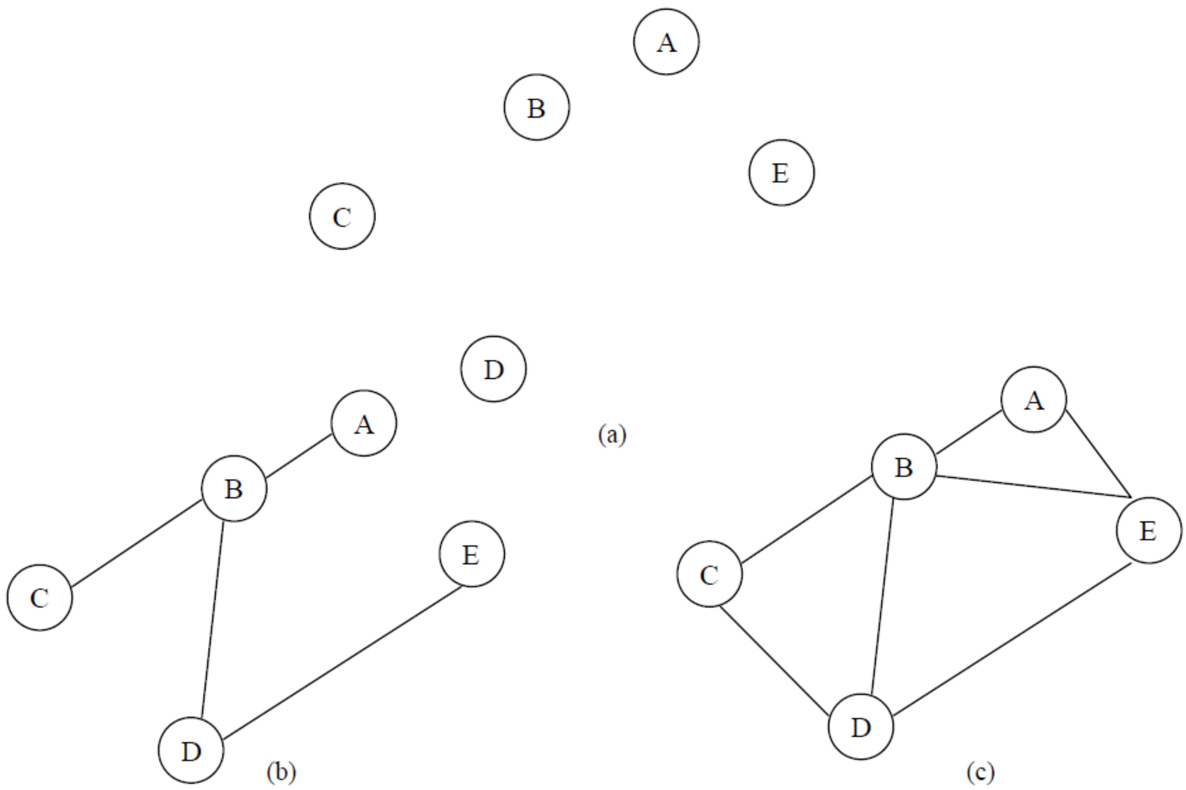
2. نستخدم MST-Prim لإيجاد شجرة الـ (minimum spanning tree) من r.
3. نضاعف الشجرة بحيث نحصل على القيمة العليا للكلفة الكلية.
4. أصبح من السهل الآن معرفة الدوائر الصغيرة.
5. نمر بالعقد مع تجنب الدوائر وبتطبيق متباينة المثلث للحصول على الطريق المباشر الأقصر بين كل عقدتين مع مراعاة عدم زيارة العقدة أكثر من مرة.

[5] Carmon H. Thomas, L. E. C., Rivest L. Ronald, stein Clifford (1996). "Introduction to algorithms."

تطبيق:

لتكن لدينا العقد A,B,C,D,E:

بعد تطبيق خوارزمية الـ(prim) نحصل على الـ(minimum spanning tree)، ثم نوجد الدوائر الفرعية، وبعدها نقوم بتحسين الحل باجتياز الدوائر وبالاستفادة من متراجحة المثلث مع مراعاة الشروط السابقة.



شكل 3: في الشكل (a) لدينا المخطط الأولي للمدن، ثم الشكل (b) بعد إيجاد الشجرة، من ثم (c) بعد إيجاد الدوائر الفرعية.

وبعد التخلص منها تنتج لدينا دارة هاملتون الآتية:

$$A, B, C, D, E$$

- نفرض H^* الرحلة المثلى لمجموعة عقد، والـ(minimum spanning tree) مبنية من رحلة حُذفت منها حافة، ومنه كلفتها أقل من كلفة الحلة الأفضل، أي:

$$c(T) \leq c(H^*) \qquad (1)$$

نعرف الرحلة الكاملة على أنها سلسلة كاملة من العقد التي تُزار بغض النظر إذا كانت مُزارة من قبل أو لا، وفي هذا المثال لدينا الرحلة الكاملة W:

$$W = A, B, C, B, D, B, E, B, A$$

وهذه الرحلة تزور كل عقدة مرتين وبالتالي:

$$c(W) = 2c(T) \qquad (2)$$

من (1) و (2):

$$c(W) \leq 2c(H^*)$$

هذا يعني أن الرحلة الكاملة هي بأسوأ الأحوال ضعف الرحلة الأمثل، وبعد حذف العقد المكررة، نحصل على دارة هاملتون:

$$H = A, B, C, D, E$$

أي:

$$c(H) \leq c(w)$$

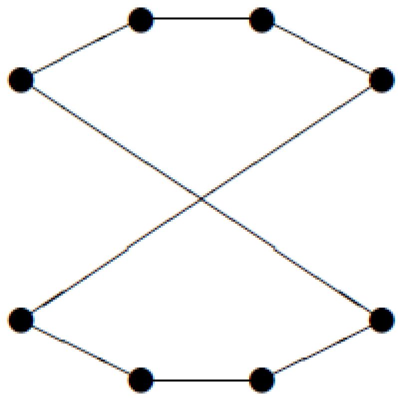
ومنه:

$$c(H) \leq c(H^*)$$

الفصل الثاني: 2_opt and 3_opt heuristic:

تعتمد هذه الخوارزمية على تشكيل طريق أولي نبدأ منه تطبيق الخوارزمية، ويفضل أن يكون هذا الطريق مأخوذ عبر خوارزمية الجار الأقرب، لتقليل الكلفة الزمنية.

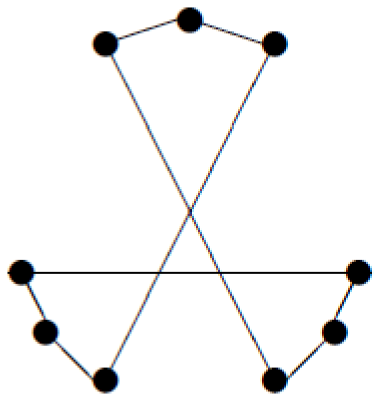
عند تشكيل المسار الأولي نقوم بحذف حافتين من هذه الرحلة، وإعادة تشكيل حافتين جديدتين، نلاحظ أنه هناك طريقة واحدة لإعادة تشكيل حافتين، لذلك مازلنا نشكل دارة هاملتون، ولكننا نقوم بذلك فقط في حال كانت الرحلة الجديدة أقصر من التي تسبقها، ونستمر بهذه العملية حتى تنتهي كل التحسينات الثنائية الممكنة (2_opt moves)، ونكون قد حصلنا على **2-optimal tour**.



شكل4: 2_optimal move

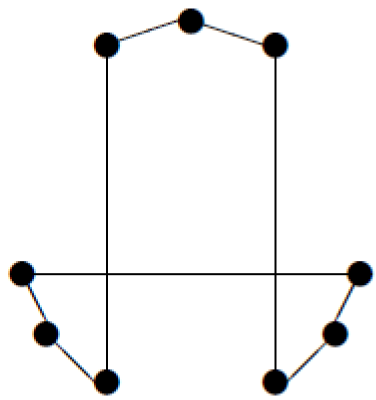
تعمل خوارزمية التحسينات الثلاثية (3_opt algorithm) بشكل مشابه للخوارزمية السابقة ولكن بدلاً من حذف حافتين نحذف ثلاث حواف، وسنجرب هنا طريقتين لتشكيل الحواف الجديدة، وهذا مشابه للقيام بعمليتين من الـ (2_opt moves)، ننهي البحث عندما تنتهي كل الحركات الثلاثية وبذلك نكون قد حصلنا على **3-optimal tour** وهي أيضاً **2-optimal tour**.[6]

إذا نظرنا إلى الرحلات على أنها تبديلات للمدن، فإن حركة (2_opt) هي عبارة عن عكس سلسلة من التبديلات للمدن، وحركة (3_opt) هي عبارة عن عكس لسلسلتين أو ثلاث من تبديلات المدن.



شكل 5: A_3opt move (2)

[6] Nilsson, C. (Heuristic for the Travelling Salesman Problem).



شكل6:(1) A 3_opt mov

Speeding up 2_opt and 3_opt:

عند الحديث عن تعقيد هذه الخوارزميات، نجد أن الـ (2_opt) تسير بـ $O(n^2)$ ، حيث نحتاج إلى اختيار حافة (c_1,c_2) والبحث عن حافة أخرى (c_3,c_4) ، وتنتهي الحركة فقط إذا كان:

$$dist(c_1,c_2)+dist(c_3,c_4)>dist(c_2,c_3)+dist(c_1+c_4)$$

وقد لاحظ كل من الباحثين ستيغليتز و وايتنر أنه من المكن اختصار البحث في حالة كانت:

$$dist(c_1,c_2)>dist(c_2,c_3)$$

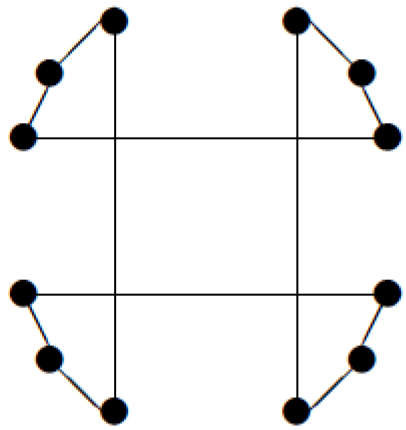
غير محققة من اجل أي ثلاث مدن C1,C2,C3 هذا يعني أنه بالإمكان اختصار مساحة كبيرة من البحث وهذه المعلومة الإضافية ستكلفنا المزيد من الوقت في الحساب $O(n^2 \log n)$ ونحتاج مساحة أكبر من الذاكرة ولكن بالاستفادة من طريقة الجار الأقرب بالاحتفاظ بقائمة للجار الأقرب لكل مدينة وبتقليص عدد المدن في القائمة السابقة تصبح الفكرة السابقة قابلة للتطبيق.

نفرض أننا قمنا بوضع m جار أقرب لكل مدينة يمكننا ترقية التعقيد إلى $O(mn)$ بملاحظة أننا نحتاج إلى إيجاد الجار الأقرب لكل مدينة منذ البداية ثم استخدامه متى نريد أي لا حاجة لإيجاده في كل مرة.

مع العلم أنه عندما نقوم بتقليص m فإن كفاءة الحل تتقلص كمثال على ذلك: عندما m=20 هذا سيقلص الكفاءة بمقدار ضئيل علما أن عدد المدن يساوي 25 بينما باختيارنا m=5 هذا سيعطينا حل سريع جداً لا يتمتع بالكفاءة المطلوب.

ولكن هل علينا الاكتفاء بـ 3_opt moves ؟؟

بإمكاننا المتابعة بـ 4_opt moves وأكثر، ولكن كل من هذه الحركات سوف يستغرق المزيد من الوقت مقابل تحسين غير ملحوظ على كفاءة الحل مقارنة بـ 3_opt و2_opt.



4_opt move :7 Figure

الفصل الثالث: الخوارزميات الجينية: Genetic algorithms

تعتمد فلسفة الخوارزميات الجينية (الوراثية) على توليد عدد كبير من الحلول الممكنة لمشكلة معينة، ثم تقييم كل حل من هذه الحول، وتكون للحلول الأفضل فرص أكبر لتوليد حلول أخرى في حين تقل فرص توالد الحلول السيئة، وبتكرار هذه العملية تتطور نوعية الحلول المطروحة وتصل أو تقترب من الحل الأمثل، فالخوارزميات الوراثية إذا ما طُبقت بالشكل الصحيح تكون فعالة جداً في حل مشكلات معقدة تعجز عنها غالباً الخوارزميات الأخرى.

تطبيق الخوارزمية الوراثية في حل مسألة البائع المتجول[7]:

نحتاج لحل مسألة البائع المتجول باستخدام الخوارزمية الجينية إلى الخطوات التالية:

1. البيانات الأولية (Initial data):

وهي قراءة لقيم متغيرات مسألة وتتضمن:

- مصفوفة الكلفة أو المسافة C: حيث تمثل عناصر كلفة السفر أو المسافة بين المدن في مسألة البائع المتجول.

[7] Bryant, K. (2000). Genetic Algorithms and travelling salesman Problem.

2. إنشاء الجيل الابتدائي:

ويعد النقطة الأولى لحل المسألة، وتتم عملية بناء الجيل الابتدائي بطريقة عشوائية حيث يتم إنشاء عدة كروموسومات ابتدائية بحيث أن كل كروموسوم يمثل مساراً كاملاً ، ويمثل طول الكروموسوم بعدد المدن الواجب زيارتها.

حيث أن كل جين من جينات الكروموسوم يمثل تسلسل لرحلة معينة.

فيكون طول الكروموسوم (I) أي أنه يحتوي على مسار عدد مدنه (I) وكل جين يمثل تسلسل مدينة من المدن داخل الكروموسوم.

ويتم اختيار كل مدينة بشكل عشوائي بحيث لا تتكرر كل مدينة أكثر من مرة لتحقيق دارة هاملتون ثم العودة المدينة التي بدأنا منها.

Gene 1	Gene 2	-	-	-	Gene I

Figure 8: كروموسوم من الجيل الابتدائي

3. دالة الهدف:

نقوم بحساب دالة الهدف الخاصة بالمسألة وذلك لكل مقطع من مقاطع الجيل، ودالة الهدف في هذه المسألة عبارة عن مجموع الكلف أو المسافات بين المدن، ويمكن توضيح ذلك عن طريق حساب دالة الكلفة للكروموسوم بحيث:

$$\text{objective function (string i)} = z_i = c_{gene1,gene2} + \ldots + c_{genei,gene1}$$

4. اختيار الآباء: يتم اختيار جميع كروموسومات الجيل الابتدائي ليكونوا آباء، إذ يقوم كل كروموسوم بالتزاوج مع جميع الكروموسومات في الجيل الابتدائي علماً أن كل عملية تزاوج تنتج فردين جديدين.
5. توليد الأجيال: بعد اختيار مقاطع الآباء يتم إنشاء الأجيال اللاحقة والتي يكون عددها محدداً بالقيمة التي يتم ادخالها في بداية التنفيذ.
6. التداخل الإبدالي: يتمثل عمل التداخل (العبور) باختيار مقطعين ثم نقوم بإجراء عملية التداخل للحصول على النسل، وتختلف عملية التداخل الإبدالي في مسألة البائع المتجول بأن كل جين يمثل تسلسل مدينة من المدن ولا يجوز تكرار المدينة داخل الكروموسوم، بحيث:

لنفرض أن لدينا والدين هما P1,P2 كالآتي:

$$P1 = 2\ 8\ 0\ 1\ 3\ 4\ 5\ 7\ 9\ 6$$

$$P2 = 1\ 0\ 5\ 4\ 6\ 8\ 9\ 7\ 2\ 3$$

نختار المدينة الأولى في P1 ونجعلها المدينة الأولى في الولد الأول offspring1

لإيجاد المدينة التالية في الولد الأول نقوم بالبحث عن الدينة الحالية التي تم اختيارها من P1 في P2، نقوم بإيجاد موقعها في P2 ثم نقوم باختيار المدينة التي في نفس الموقع في P1 فيصح الولد الأول كالآتي:

O1:2 _ _ _ _ _ _ _ 9 _

ثم نستمر بنفس العلمية فنحصل على الولد الأول كالآتي:

O1:2 8 0 1 _ 4 5 _ 9 _

في الخطوة التالية سنأتي بالمدينة 2 والتي هي موجودة أصلاً في الولد الأول لذلك سنوقف الإجراء وننسخ المدن من P2 في المواقع المطابقة المتبقية فيصبح O1 كالآتي:

O1:2 8 0 1 6 4 5 7 9 3

لتوليد الولد الثاني O2 من عملية التزاوج نقوم باختيار المدينة الأولى من P2 ونجعلها المدينة الأولى في الولد الثاني ونكرر نفس الإجراء مع P1 أي نبحث عن المدينة الحالية والتي تم اختيارها من P2 في P1 وهكذا فينتج الولد الثاني كالآتي:

O2:1 5 4 3 8 9 7 2 6

إذا كان المجتمع الابتدائي يحتوي على n من الآباء فإن ذلك سيولد $\frac{n(n-1)}{2}$ من عمليات التعابر مع العلم أن كل عملية تعابر تنتج مقطعين من الذرية.

7. الطفرة: في هذه الخوارزمية تحدث الطفرة على الجين نفسه، فبعد الانتهاء من تكوين مقاطع الجيل نبدأ بحساب دالة الهدف لكل مقطع من مقاطع الجيل الجديد بنفس الطريقة التي يتم فيها حساب مقاطع الجيل الابتدائي.

بعد تكوين العدد المحدد من الأجيال يتوقف تنفيذ الدالة ويتم تقييم النتائج لملاحظة مدى التقرب من الحل لاتخاذ القرار إما بالاستمرار بتكوين الأجيال أو التوقف إذا كانت النتيجة مناسبة.

وهكذا نكون قد وضعنا حلاً لمسألة البائع المتجول باستخدام الخوارزميات الجينية.

النتائج

- إن مسألة البائع المتجول تنتمي إلى صف التعقيد NP_complete حيث وجدت مسألة من الصف NP يمكن تحويلها إلى مسألة البائع المتجول، وهذا يعني أن أي خوارزمية تحل البائع المتجول يمكن تحويلها لخوارزمية تحل أي مسألة أخرى في الصف NP.
- إن خوارزمية الجار الأقرب تعطي حلولا جيدة غالباً وبتوقيت صغير جداً ولكنها قد تنتج حلولا بعيدة أو غير دقيقة في بعض الحالات.
- إن الحل المقترح باستخدام الخوارزمية الجشعة جيد جداً بحيث لا يبتعد عن الحل الصحيح بمقدار كبير مهما اختلفت كلف السفر بين المدن وذلك بتعقيد زمني $O(n^2 \log(n))$.
- أمكن بالاستفادة من متباينة المثلث التي تتحقق في مسألة البائع المتجول الإقليدية وذلك باستخدام الـ MST لتوليد حل بكفاءة أصغر أو تساوي ضعف الحل الأمثل.
- إن طريقة التبديل بين المسارات لإنشاء مسارات جديدة تعتبر طريقة فعالة جداً للحصول على حل بكفاءة عالية بتعقيد $O(n^2 \log(n))$
- يمكن توظيف الخوارزميات الجينية لحل مسألة البائع المتجول وقد أظهرت الخوارزمية في الجيلين الأول والثاني نفس الكلفة الأدنى وبالتالي وضعت حلاً أمثلا بعد تنفيذ الخوارزمية على جيلين من الكروموسومات، ولكنها قد تستغرق عدد أكبر من الأجيال لتولد الحل الأفضل ولكن ميزتها الأساسية أنها توجد الحل الأفضل دوماً على الرغم من التكلفة العالية.

إن طريقة تبديل المسارات بـ 2_opt move و 3_opt move تعتبر الطريقة الأفضل والأسرع من بين الطرق المطروحة حيث تكون نسبة الخطأ فيها ضئيلة وبتعقيد كثير حدود زمني معقول.

إضافة إلى أن إدخال الخوارزميات الجينية في حل هكذا نوع من المسائل يعتبر فعال جداً في إعطاء الحل الأفضل دوماً .

الخاتمة والتوصيات

إن عدد لا يستهان به من علماء الرياضيات والخوارزميات حول العالم ما زال يبحث في معضلة NP=P، وتعد مسألة البائع المتجول مثالاً جيداً للدراسة في هذه المعضلة الرياضية المفتوحة، ومازال الطريق مفتوح لتحسين حلول هذه المسألة، وقد حاولت أن

أترك بصمتي في هذا الموضوع وذلك بتقديم مقارنة بين عدة خوارزميات تقترب إلى حد جيد من الأمثلية في الحل كما حاولت بمجهود فردي أن أطرح حلاً لهذه المسألة وأن أقدم تحسيناً لأحد الحلول بالإضافة إلى الإجابة عن التساؤلات حول تصنيف مسألة البائع المتجول في صفوف التعقيد.

* إن السرعة هي العامل الأساسي في حل المسائل المتعلقة بمشاكل في صفوف التعقيد، وإن إيجاد تعقيد تابعي يعطي حلاً مثالياً هو الهدف الأول إذا ما أراد أحدهم المنافسة في حل هذه المسائل.

* إن العمل على تخفيض كلفة الخوارزمية الجينية قد يكون المفتاح لحل هذه المسألة وغيرها من مسائل الصف NP-complete لأن الخوارزمية الجينية تعطي الحل الأفضل دوماً ولذلك قد يكون السر بإيجاد شيء شبيه بها.

* إن إيجاد الرابط المشترك بين مسائل الـ NP-complete الـ 21 قد يكون لغزاً يجب الإبحار فيه للمتابعة في هذا البحث والأبحاث المتعلقة بهذه المعضلة.

من يدري، قد تأتي خوارزمية "كل شيء" لتقضي على كل تصنيفات صفوف التعقيد يوماً ما !!!

المصادر والمراجع

المراجع العربية:

1. د. أحمد السبعاوي (2012) "استخدام خوارزمية التفريع والتحديد والخوارزميات الجينية في حل مسألة البائع المتجول" المجلة العراقية للعلوم الإحصائية.
2. الباحثون السوريون –مسألة البائع المتجول– Travelling Salesman Problem
http://www.syr-res.com/article/6018.html

المراجع الأجنبية:

3. Bryant, K. (2000). Genetic Algorithms and travelling salesman Problem.

4. Nilsson, C. (Heuristic for the Travelling Salesman Problem).

5. Carmon H. Thomas, L. E. C., Rivest L. Ronald, stein Clifford (1996). "Introduction to algorithms."

6. McGeoch, D. S. J. a. L. A. (November 20, 1995). ""The travelling salesman Problem: A Case Study in Local optimization"."

7. Gilbert ،Laborte (1991) ، *The Traveling Salesman Problem: An overview of exact and approximate algorithms*