حَلُّ المُعَادَلَةِ التَّفَاضُلِيَّةِ لِلنَّوَاسِ البَسيطِ

2015 2016

أحمد مصطفى

المركز الوطنيّ للمتميّزين

2015 2016

الجمهوريّة العربيّة السّوريّة

 وزارة التّربيّة

المركز الوطني للمتميّزين

حلقة بحث مقدّمة في مادّة الفيزياء بعنوان:

**حَلُّ المُعَادَلَةِ التَّفَاضُلِيَّةِ لِلنَّوَّاسِ البَسِيطِ**

تقديم الطّالب: أحمد مصطفى

بإشراف المدرّس: عبد الرحمن الهاشم

العام الدّراسيّ: 2015 – 2016

المقدّمة:

عندما ندرس مسألةً في الفيزياء نجد أنّنا نمثّل المعطيات برموز رياضيّة، ثمّ نحاول إيجاد

العلاقات بين هذه الرموز بشكل معادلاتٍ (قوانين) فيزيائيّة. هذه المعادلات تعطينا القدرة على التنبّؤ

بما سيحصل في المستقبل للأشياء التي ندرسها. مثلاً معادلات الحركة تعطينا القدرة على التنبّؤ بموقع

الجسم في المستقبل عندما يتحرّك وطاقته الحركيّة والكامنة... إلخ. في الكثير من مسائل الفيزياء نحتاج إلى دراسة التغيّرات التي تطرأ على الأجسام من خلال دراسة التغيّرات الممكنة على المتغيّرات

المستقلّة والتّابعة والتي استخدمناها لتمثيل المعطيات والمجاهيل في المسألة، وبعبارة أخرى من خلال

علاقات تفاضليّة بين المتغيّر المستقلِّ والمتغيّر الغير مستقلّ أي من خلال علاقة تابع Function

تفاضليّة. في العلاقة التفاضليّة يكون لدينا عادةً مشتقّ التّابع بدلالة المتغيّر المستقلّ بالإضافة إلى

متغيّرات أخرى، تظهر جميعها في المعادلة التفاضليّة.

والسّؤال الذي سنحاول الإجابة عنه في هذا البحث هو: ما هو حلّ المعادلة التّفاضليّة الغير خطية و مقارنتها مع الحل التقريبي، و المعادلة هي:

حيث  *ثابت، المتغيّر التّابع، المتغيّر المستقلّ.*

***المعادلات التفاضليّة في الفيزياء:***

*المعادلة التّفاضليّة هي التّمثيل الرياضيّ(النّموذج الرياضيّ) للمسألة الفيزيائيّة، وحلُّ المعادلة التّفاضليّة يعني التّوصّل إلى التّوابع والمتغيّرات والقيم الّتي تحقّق المعادلة التّفاضليّة والشّروط الفيزيائيّة للمسألة وتجيب على الأسئلة الّتي نطرحها في المسألة الفيزيائيّة، ويتضمّن أسلوب حلِّ المعادلة التّفاضليّة عادةً استخدام التّكامل على التّوابع في المعادلة التّفاضليّة للحصول على (الحلِّ الدّقيق Exact أو الحلّ بصيغة مغلقةClosed Form Solution ) أو عند عدم القدرة إلى التّوصّل إلى مثل هذا الحلِّ اللّجوء إلى الحلِّ التقريبيّ Approximate أو التجريبيّ (مثلاً باستخدام الحواسيب (النّمذجة الحاسوبيّة Computer Modeling) أو اللّجوء إلى تجربة فعليّة) للمسألة والذي يعطينا إجابات تقريبيّة بالدّقّة الّتي نعتبرها معقولةً أو تلبّي ما نريد وعلينا أن نعلم أنّ الغالبيّة العظمى من المسائل في الفيزياء تُحلُّ بالطّرق التقريبيّة أو التجريبيّة بسبب الصّعوبات البالغة في حلها بشكل دقيقٍ، المهمُّ أن الحلَّ الّذي نتوصّل إليه يعطينا تمثيلاً فيزيائيّاً منطقيّاً ومعقولاً للمسألة وإجابات ذات دقّةٍ مقبولةٍ ضمن شروط المسألة.[[1]](#footnote-1)*

***مسألةُ البندولِ البسيط:***

*لدينا كتلة صلبة صغيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة طوله ثابت ومثبت في السقف بحلقة تتيح*

*الحركة دون احتكاك نزيح الكتلة بزاوية قدرها عن الشاقول ثم نتركها فتتحرك حركة نواسيّة على قوسٍ دائريٍّ حول الحلقة ، كما هو مبين في الشكل.*

**

*والمطلوب هو صياغة المعادلة التّفاضليّة للحركة بدلالة الزّاوية مع الشاقول، وإيجاد العلاقة الّتي تمثّل مسار الحركة أي إيجاد التّابع الّذي يمثّل تغيّر الزّاوية بدلالة الزّمن ودور الحركة الاهتزازيّة* .

لإيجاد المعادلة التّفاضليّة للحركة نستخدم قانون نيوتن الثاني:

القوّة الخارجيّة المؤثّرة هي فقط قوّة الثّقالة: وهي سالبة لأنّ اتّجاهها إلى الأسفل بينما الاتجاه

الموجب إلى الأعلى.

نحلّل قوّة الثّقالة إلى مركّبتين:

* قوّةٌ تشدّ الخيط وليس لها دورٌ في الحركة لأنّ ردّ فعل الخيط يوازنها (قانون نيوتن الثّالث: الفعل

يساوي ردّ الفعل)

* وقوّةٌ تحرّك الكتلة بالاتّجاه المبيّن في الشّكل، تدعى قوّة الارجاع restoring forceنحو وضع

التّوازن المستقرّ (النقطة ) وهي مركّبة قوّة الثّقالة باتّجاه المماس للحركة، وهذه القوّة سالبةٌ أيضاً،

وقيمة هذه القوّة هي:

تتحرّك الكتلة على قوسٍ دائريٍّ وتقطع مسافةً هي طول القوس ونحسبه من العلاقة:

نشتقّ طرفي العلاقة بالنسبة للزّمن للحصول على السّرعة:

نشتقّ طرفي العلاقة السّابقة بالنّسبة للزّمن للحصول على التّسارع:

نعوّض قيم القوّة والتّسارع في قانون نيوتن الثّاني فنحصل على:

باختصار من طرفي المعادلة وترتيب القيم فيها نحصل على المعادلة التّفاضليّة للحركة:

*نلاحظ أنّ هذه المعادلة مماثلةٌ تماماً للمعادلة الواردة في سؤالنا في مقدّمة البحث إذا استخدمنا التعديلات التّالية على التّسميات والمتغيّرات:*

*المطلوب في المسألة حلّ المعادلة التّفاضليّة وإيجاد التّابع بدلالة الزّمن والّذي يمثّل منحني مسار الحركة، وحساب دور الحركة الاهتزازية. المعادلةُ التّفاضليّة النّاتجة هي معادلةٌ صعبة الحلّ للغاية لأنّها معادلةٌ تفاضليّةٌ عاديةٌ غير خطّيّةٍ بينما المعادلات التّفاضليّة الّتي لها حلول هي المعادلات التّفاضليّة الخطّيّة.*

***تعاريف أساسيّة حول المعادلات التّفاضليّة:***

*وصولنا لهذه المرحلة فرصةٌ لإعطاء بعض التّعاريف الأساسيّة حول المعادلات التّفاضليّة.*

1. *المعادلات التّفاضليّة نوعان:*

*معادلة تفاضليّة عاديّة: تحتوي على تفاضلِ متغيّرٍ تابعٍ بدلالة متغيّرٍ مستقلٍّ*

 *واحدٍ وهذا هو نوع معادلتنا.*

 *معادلةٌ تفاضليّةٌ جزئيّةٌ: تحتوي على تفاضلٍ جزئيٍّ تابعٍ بدلالة متغيّرين مستقلّين أو أكثر، وهي*

*خارج نطاق دراستنا.*

1. *درجة المعادلة:*

*الدّرجة تعني أعلى درجة للمشتقِّ في المعادلة أي مشتقّ درجةٍ أولى أو ثانية أو أعلى، وفي حالتنا المعادلة من الدّرجة الثّانية بسبب وجود مشتقٍّ من الدّرجة الثّانية:*

1. *طبيعة المعادلة:*

*خطّيّةٌ أو غير خطّيّةٍ. هذه الصّفة حاسمةٌ في تقرير سهولة حلِّ المعادلة ودرجة تعقيد الحلِّ، والمقصود بصفة الخطّيّة يتعلّق بالمتغيّر التّابع ومشتقّاته بحيث أنّ أسَّ كلٍّ منها في المعادلة هو واحد أو صفر وألّا تحتوي المعادلة على جداءاتٍ للمتغيّر التّابع أو مشتقّاته أو توابع لا يمكن تمثيلها بتعبيرٍ مبسّط للمتغيّر المستقلٌ.*

*المعادلة غير خطّيّةٍ إذا احتوت على تعابير للمتغيّر التّابع أو مشتقّاته بأسٍّ أعلى من الواحد*

 *أو تعبيرٍ للمتغيّر التّابع لا يمكن تمثيله بشكلٍ مبسط، أمثلة:*

*ونلاحظ هنا أنَّ طبيعة المعادلة لا تتعلق بأسِّ المتغيّر المستقلِّ.*

*بناءً على ما سبق نستنتج أنَّ معادلتنا التّفاضليّة هي:*

*معادلةٌ تفاضليّةٌ غير خطّيّةٍ تحديداً بسبب وجود التابع والّذي لا يمكن تمثيله بتعبيرٍ بسيطٍ*

*للمتغيّر التّابع وهي معادلةٌ تفاضليّةٌ عاديةٌ من الدّرجةِ الثّانية بسبب وجود التعبير فيها. وبالعودة إلى مراجع التحليل الرياضيِّ نجد أنّه لا يوجد حلٌّ دقيقٌ للمعادلة ضمن التّوابع المعروفة.*

*بناءً على ما سبق هناك طريقتين عامّتين لحلِّ المعادلة:*

***الطّريقة الأولى باستخدام معادلة الحركة التّقريبية:***

*وهي الطّريقة التي تُدرّس في الثّانوية والصّفوف الأولى الجامعيّة تتضمّن الطّريقة تبسيط صيغة المعادلة التّفاضليّة بحيث تصبح مماثلةً لنوعٍ معيّن من المعادلات التّفاضليّة حلّها موجودٌ ضمن التّوابع المعروفة وفي حالتنا يجب تحويل المعادلة الغير خطّيّة إلى معادلةٍ خطّيّةٍ عن طريق التّخلّص من التابع باستخدام تقريبٍ مقبول ٍيحقّق شروط المسألة الفيزيائيّة وفي حالتنا هذه التّقريب المقبول هو استبدال جيب الزّاوية بالزّاوية مع اشتراط أن تكون أكبر زاويةٍ لحركة البندول هي زاويةٌ صغيرةٌ تحقّق هذا الشّرط مع المحافظة على دقّةٍ معقولةٍ ومقبولةٍ للنّتائج، وفي حالتنا يمكن أن تكون القيمة العظمى للزّاوية هي على خطأٍ في دور الحركة بحدود فقط وهي دقّةٌ مقبولةٌ ومعقولةٌ، إذاً سنقوم بالتّغيير التّالي في المعادلة التّفاضليّة:*

*في حالتنا هذه تصبح معادلتنا التّفاضليّة السّابقة معادلةً خطّيّةً ذات معاملاتٍ ثابتةٍ:*

*وبتغيير ثابت المتغيّر التّابع على الشّكل التّالي نحصل على الشّكل النّهائيّ للمعادلة التّفاضليّة:*

*يمكننا إيجاد حلِّ معادلة الحركة التّقريبيّةُ بإحدى الطّريقتين:*

*الطّريقة التّجريبيّة: من شكل المعادلة ومعرفتنا بأنّها تمثّل حركةً اهتزازيّةً دوريّةً (الحركة التوافقيّة البسيطة) وأنّ هذا النّوع من الحركات يمثّلها عادةً تابعٌ مثلثّي، فنستطيع تجريبَ تابع الجيب أو التجيب، وفي حالتنا هذه نجرّب التّابع التّالي:*

حيث المطال الأعظمي للحركة، أي الزّاوية العظمى التي يصنعها الخيط مع الشّاقول أثناء الحركة وهي قيمةٌ ثابتةٌ نحصل عليها من الشّروط الفيزيائيّة للحركة.

 يمثّل طور الحركة ويقاس عادةً بالرّاديان و هو انزياح الطّور.

وللتّأكّد من كون تابع الحركة يحقّق شروط الحركة نعوّضه في المعادلة التّفاضليّة للحركة:

نلاحظ تساوي طرفي المعادلة.

لكن علينا أن نختار شروط الحركة لتحديد قيم الثّوابت و . لذلك سنختار أن تبدء الحركة عند بدء قياس الزّمن أي بحيث يكون لدينا قيمة الزّاوية .

وبتعويض شروط بدء الحركة في معادلات الحركة نحصل على:

إذاً تابع مسار الحركة يمثّل بالعلاقة التّالية:

الطّلب الثّاني: إيجاد دور الحركة الاهتزازيّة أي الزمن اللازم لإتمام حركة اهتزازيّة كاملة.

سنحدّد المعنى الفيزيائيّ للثّابت . بعد زيادة زمن الحركة بالقيمة نجد قيمة تابع الحركة:

أي أنّ التّابع يكرّر حركته بعد مرور زمنٍ قدره لذلك نقول أنَّ هو دور الحركة ، أي الزّمن اللازم لإتمام حركة اهتزازيّة كاملةٍ واحدةٍ وبأخذ العلاقة بعين الاعتبار نحصل على:

وهي العلاقة المطلوبة لدور الحركة.

الطّريقة الرياضيّة: بمقارنة المعادلة التّفاضليّة بالمعادلات التّفاضليّة العاديّة الخطّيّة من الدّرجة

الثّانية ذات المعاملات الثّابتة نجد أنّها تنتمي إلى هذا النّوع وأنّ الحلّ الرّياضي لهذا النّوع من

المعادلات يكون على الطّريقة التّالية:

نكتب المعادلة بالشّكل التّالي: ومنها نستنتج المعادلة المميّزة لها والّتي نتوصّل إليها باستبدال المشتقّ برمزٍ أسّه يساوي درجة المشتقّ وكتابة الثّابت الموجود أمام المتغيّر التّابع كما هو (باعتبار أسّ صفراً) فنحصل على ما يلي:

نجد جذور المعادلة المميّزة كما يلي باستخدام الأعداد العقديّة:

ومنه يصبح جذري المعادلة التّفاضليّة الأصليّة هما:

وباستخدام علاقة أويلر الشّهيرة للتّوابع العقدية للتّحويل من التّابع الأسّي إلى التّابع المثلّثيّ:

وأخيراً نحصل على الحلّ الكامل للعلاقة التّفاضليّة من جمع الجذرين السّابقين وإدخال ثابتين في الحلّ بسبب الحاجة إلى إجراء التّكامل على المعادلة التّفاضليّة مرّتين للوصول إلى الحلّ النّهائي:

وبتعريف ثوابت جديدة:

)

من الشّروط الابتدائيّة للمسألة نجد:

وتصبح العلاقة النّهائيّة:

**الطريقة الثّانيّة الحلّ الكامل للمعادلة التّفاضليّة الغير خطّيّة:**

المعادلة هي:

ولتبسيط الحلّ نستخدم مرّة أخرى تعريف المتغيّر:

فتصبح المعادلة:

نلاحظ أنّ المعادلة السّابقة قابلة للمكاملة عن طريق تحويلها إلى تفاضلٍ تامٍّ بدلالة الزّمن.

ننقل التّعبير في الطّرف الأيمن إلى الطّرف الأيسر ونضرب المعادلة بمشتقّ الزّاوية بالنّسبة للزّمن أي نضربها بالتعبير :

نلاحظ أنّ التّعبير السّابق ينتج عن تنفيذ عمليّة الاشتقاق على تعبير التّفاضل التّام التّالي:

نستطيع الآن مكاملة المعادلة فينتج لدينا:

حيث ثابت ناتج عن مكاملة الجزء الأيمن.

عندما يكون النوّاس في المطال الأعظميّ تكون السّرعة الزّاويّة معدومة أي ومنه نحصل على قيمة الثّابت:

فتصبح صيغة المعادلة:

وبترتيب تعابير المعادلة نحصل على الشّكلين المتكافئين:

**الطريقة الأولى في الحلّ:**

من المعادلة نقوم بفصل المتغيّرات:

نستطيع تحويل المعادلة السّابقة بواسطة سلسلة من العلاقات المثلّثيّة الشّهيرة إلى تكامل قطع ناقص:

لكن لدينا:

من العلاقات السّابقة وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

وبعد التبسيط نحصل على:

وبمكاملة الطرفين نحصل على التّكامل التالي:

لكن التّكامل السّابق (من دون الثّابت قبله) يدعى تكامل جاكوبي الأوّل للقطع النّاقص ويسمّى من كلمة ونلاحظ أنّه تكامل يعتمد على متغيّرين ومنه تصبح العلاقة كالتّالي:

وهذا التّابع يشبه الجيب إلى حدٍّ كبير ولكن حساب قيمه معقّد جدّاً ويتطلّب الرّجوع إلى مراجع خاصّة.

علينا الآن إيجاد علاقة بين وزاوية الإنتقال ، لدينا:

ومنه نحصل على العلاقة المطلوبة:

نعوض في العلاقة فنحصل على:

ومنه نحصل على العلاقة النّهاية لتابع الحركة بدلالة الزّمن:

بقي لدينا الطّلب الثّاني حساب دور الحركة:

عندما يكون النوّاس في أعظم زاوية له تكون السرعة الزّاويّة معدومة أي عندما  *يكون ومنه نحصل على قيمة الزّاوية الموافقة:*

إذاً البندول سيتحرّك من اليمين من زاوية قدرها إلى نقطة بداية حساب الحركة بزمن يساوي ربع الدّور المطلوب، نسمي الدّور فتكون قيمته:

ومن تعريف تكامل القطع النّاقص الكامل من النّوع الأوّل تصبح العلاقة النّهائيّة لدور الحركة:

علماً إنّ:

**تقويم الحلول:**

يمكن ممّا سبق وبالعودة إلى كتب الرّياضيّات التي تحوي جداول قيم التّوابع الخاصّة و لأجل قيم مختلفة للانتقال الزّاوي رسم المنحني الذي يمثّل مسار الحركة، ويمكن أيضاً استخدام برامج حاسوبيّة خاصّة لفعل ذلك.

ولكن أيضاً يمكن إيجاد حلول تقريبيّة حسابيّة تعطينا القيم المطلوبة لحساب دور الحركة الحقيقيّ ومقارنة النّتائج مع علاقة دور الحركة التقريبيّ للعلاقة الخطّيّة المبسّطة للحركة كي نتحقّق من الخطأ النّاتج عن استبدال جيب الزّاوية بالزّاوية في علاقة الحركة.

بالعودة إلى كتب الرياضيّات نجد أنّه يمكن ايجاد القيم الحسابيّة لدور الحركة الحقيقيّ من السّلسلة الحسابيّة التّالية التي تتيح لنا حساب الدّور إلى الدّقة التي نرغب فيها:

سنطبّق ونقارن الحلول على مسألة فعليّة:

لدينا المعطيات التّالية:

باستخدام برنامج اكسل نحصل على جدول المقارنة التّالي بين قيم الدّور التقريبيّة والفعليّة:



و بأخذ النسبة المئوية مع زاوية المطال الأعظمي:



**الخاتمة والنّتائج:**

نلاحظ أنّ الفروقات بين القيم التقريبيّة النّاتجة عن المعادلة الخطّيّة صغيرةٌ ومبرّرة حتّى عندما لا يكون المطال الأعظميّ للنوّاس صغيراً كما تشترط كتب الفيزياء التقليديّة، فنسبة الخطأ في الدّور لمطالٍ أعظميٍّ قدره لا يتجاوز وهي دقّة مقبولةٌ تماماً للحسابات الفيزيائيّة المطلوبة في التّعليم بكافّة مراحله وهو ما يبرّر سبب استخدام هذه المعادلة التّقريبيّة الخطّيّة بدلاً من المعادلة الغير خطّيّة التي تمثّل تحدّياً رياضيّاً صعباً للغاية. فنلاحظ أنّ دور الحركة يتزايد مع زيادة المطال الأعظميّ

للحركة بينما في الحلّ النّاتج عن المعادلة الخطّيّة يبقى هذا الدّور ثابتاً أي أنّه مستقلٌّ عن المطال الأعظميّ وبالتّالي نكتشف أنّ هذا الفرض تقريبيّ ولكنّ دقّته جيّدة.

ملاحظةٌ ختاميّة: رأينا من خلال البحث الأمور التّالية:

1. المسائل الفيزيائيّة الفعليّة صعبةٌ للغاية ولا توجد حلولٌ بسيطةٌ لغالبيّتها.
2. هناك فرقٌ شاسعٌ في سهولة الحلّ بين المسائل الخطّيّة والمسائل اللاخطّيّة.
3. في غالب الأحيان يلجأ الفيزيائيّون إلى حلولٍ تقريبيّة للمسائل الفيزيائيّة للأسباب السّابقة.
4. نمذجة المسألة الفيزيائيّة هامّة للغاية وهي التي تحدّد إمكانيّة حلّ المسائل وطريقة الحلّ حيث لاحظنا كيف أنّ استبدال جيب الزّاوية بالزّاوية أدّى إلى تبسيطٍ هائلٍ في الحلّ وحوّل المسألة من مسألةٍ لاخطّيّةٍ ليس لها حلٌّ بسيط إلى مسألةٍ سهلة الحلّ حتّى بطريقةٍ تجريبيّة.

**المراجع:**

* James stewart. Calculus. sixth edition. © 2008 Thomson Learning, Inc. Library of Congress.
* Georgr B. Thomas, Jr. Calculus. Twelfth edition. Library of Congress.
* Stephen T. Thornton\Jerry B. Marion. Classical dynamics of particles and systems. Fifth edition.
* كتاب العامة الثالث الثانوي فيزياء ، منهاج الجمهورية العربية السورية
* Physics\_for\_Scientists\_Engineers\_Modern Physics\_9th Ed\_Serway\_Jewett

**الفهرس:**

المقدّمة ................................................................................ 2

المعادلات التّفاضليّة في الفيزياء ........................................................ 3

مسألة البندول البسيط .................................................................. 4

تعاريف أساسيّة حول المعادلات التّفاضليّة .............................................. 5

الطّريقة الأولى في الحلّ باستخدام معادلة الحركة التقريبيّة ............................... 6

الطّريقة الثّانية في الحلّ: الحلّ الكامل للمعادلة الغير الخطّيّة ............................ 9

تقويم الحلول .......................................................................... 13

الخاتمة والنّتائج ....................................................................... 16

المراجع ............................................................................... 17

1. - Georgr B. Thomas, Jr. Calculus. Twelfth edition. Library of Congress. [↑](#footnote-ref-1)