

دراسة المعادلات التفاضلية

**الغير محلولة بالنسبة للمشتق**

للعام الدراسي:

2015 - 2016

للطالب: أوس منذر حسن

إشراف: أ. يمار الحموي

في الصف: الحادي عشر

الشعبة: الأولى

حلقة بحث في مادة الرياضيات بعنوان:

*الجمهورية العربية السورية*

*وزارة الـــتــــــربــــيــــــــة*

*المركــز الوطـني للمتمــيّزين*

# ***المقدمة:***

هل تساءلت يوما كيف استطاع الفيزيائيون والكيميائيون توظيف تجاربه العملية لنتائج نظرية ؟؟

هل تساءلت يوما كيف استطاع اينشتاين الوصول لأكثر نظرياته قوة دون تجريبها ؟؟

حسنا كل ذلك كان بفضل المعادلات التفاضلية هي قوالب رياضية لمعظم الحوادث التي تحصل في الطبيعة وتحمل كل معادلة في طياتها جميع صفات الحادثة التي تمثلها.

تكتسب المعادلات التفاضلية أهمية كبرى في علوم الرياضيات والفيزياء والكيمياء فبواسطة المعادلات التفاضلية أمكن فهم الكثير من الظواهر المعقدة في حياتنا اليومية أبرزها الظاهرة الكهرومغناطيسية لذلك فهي تخبرنا عما جرى سابقا وعما سيجري لاحقا واصفة تلك الحادثة بمتحولات ترمز للزمان والمكان وعوامل أخرى تؤثر في الحادثة نفسها ولذلك ما من شخص يعمل في حقل العلوم التطبيقية إلا ويجد نفسه أمام معادلة تفاضلية أو أكثر وعليه حلها لأن حل كل معادلة هو وصف أوضح من المعادلة نفسها للحادثة التي تمثلها تلك المعادلة.

وقد تعرفنا من حلال مناهج المركز الوطني للمتميزين على المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق.

فكان السؤال هل يوجد معادلات تفاضلية من أنواع أخرى؟؟

وما المعنى الهندسي للمعادلة التفاضلية؟؟

وما هي المعادلات التفاضلية غير المحلولة بالنسبة للمشتق وما طرق حلها ؟؟

# ***خطة البحث:***

نناقش في بحثنا هذا موضوعاً هاما ًمن مواضيع العلوم الرّياضيّة التي لا تفيد فقط في حلول المسائل الرّياضيّة بل تدخل مختلف العلوم العمليّة لتكون جزءاً رئيسيّاً منها ألا وهو المعادلات التّفاضليّة:

إن دراسة هذا الموضوع يحتاج إلى خلفيةٍ في مجموعةٍ من الأبحاث في الرّياضيّات والتّي تعتبر الخلفية المشتركة لحلول الكثير من المسائل والأبحاث المهمّة في العلوم الرّياضيّة وهي:

(النّهايات \_ الاشتقاق \_ التّفاضل \_ التوابع الأسيّة واللوغاريتمية \_ التكامل) ولم أتطرق إليها في بحثي هذا لتخصص حلقة البحث بمجال المعادلات التّفاضليّة.

بدايةً: الإجابة على السّؤال الأهم (ما هي المعادلات التفاضلية؟ !!!) والتعرف على مجموعة من خصائصها ومميزاتها والتعرف على ماهية حل هذه المعادلة والمطلوب من المعادلة التفاضلية لاستخراج النتيجة المطلوبة منها.

وكما سوف نرى سيشمل البحث مجموعة من المواضيع المتعلقة بأشكال حلول المعادلات التفاضلية وهي:

***تعريف المعادلة التفاضلية:***

المعادلة التفاضلية هي كل علاقة تساوي بين متغير مستقل  ومتغير تابع  وواحد وأكثر من المشتقات التفاضلية أنها على الصورة العام:



وهذه المعادلة تسمى المعادلة التفاضلية العادية

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن مستقلان وكان  متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من جزئيا سميت المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية معادلة تفاضلية جزئية وهي على الصورة:



وإن رتبة المعادلة هي رتبة أعلى معامل تفاضلي في المعادلة أما درجة المعادلة هي درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية وعلى سبيل المثال المعادلات:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

تصنف المعادلات التفاضلية كالآتي:

* كل معادلة تفاضلية تحتوي على التفاضلات أو المشتقات العادية مثل لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحول أو أكثر تدعى معادلة تفاضلية عادية متل 1و2و3و4.
* كل معادلة تحتوي على المشتقات الجزئية مثل لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحول أو أكثر تدعى معادلة تفاضلية جزئية مثل 5و6و7و8.
* إن مرتبة المعادلة التفاضلية هي مرتبة أعلى مشتق موجود فيها ف 3و4و5و7 من المرتبة الأولى والمعادلات 1و2و6و8 من المرتبة الثانية.
* إن درجة المعادلة التفاضلية هي درجة أعلى مشتق موجود فيها إذا أمكن وضعها بشكل كثير حدود بالنسبة لجميع المشتقات في 2 فهي من الدرجة الثالثة والمرتبة الثانية.
* المعادلة التفاضلية العادية الخطية هي المعادلة الخطية هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة لكل من التابع ومشتقاته ولا تحتوي على جداءات لها في 1و 4.
* المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة للمشتقات الجزئية للتابع أو التوابع الموجودة فيها مثل 5و6و7و8.
* المعادلة ذات التفاضلات الكلية هي التي تحتوي على التفاضلات الكلية لتابع ذي متحولين أو أكثر مثل المعادلة رقم 3.

## ***تشكيل المعادلات التفاضلية العادية:***

### ***أولا: تشكيل المعادلات التفاضلية من المسائل الرياضية أو الفيزيائية أو الميكانيكية:***

يتم تشكيل المعادلات التفاضلية أحيانا عندما نتعرض لحل بعض المسائل الرياضية أو الفيزيائية أو الميكانيكية

ليكن  منحنيا اختياريا معادلته  و نقطة منه اذا كانت احداثيات النقطة  فإن ميل المماس في هذه النقطة يساوي  وبالتالي يكون ميل الناظم فيها مساوياً ان معادلة المماس في النقطة هي 

أما معادلة الناظم في  فتكون  حيث  إحداثيات النقطة الدارجة على المماس أو على الناظم.

***ثانيا: تشكيل المعادلات التفاضلية لمعادلة جبرية:***

إن تشكيل المعادلة التفاضلية لمعادلة جبرية تحتوي على ثابت أو أكثر هو إيجاد معادلة تفاضلية لا تحتوي على هذا الثابت.

ويتم ذلك باشتقاق المعادلة الجبرية بالنسبة للمتحول عدد من المرات مساو لعدد الثوابت الأساسية (التي لا يمكن تخفيض عددها) ثم بإجراء عملية حذف الثابت أو الثوابت بين المعادلة الجبرية ومشتقاتها الناتجة فنحصل على معادلة لا تحتوي على الثوابت، تكون هي المعادلة التفاضلية المطلوبة ولبيان هذه العملية نستعرض الحالات التالية:

المعادلة الجبرية تابعة لثابت واحد:

وهي من الشكل 

ولإيجاد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات الممثلة بالمعادلة السابقة نشتقها بالنسبة للمتحول  علما أن هو التابع والثابت  اختياري مع فرض أن و  موجودان فينتج لدينا ما يلي:

وهي معادلة تحتوي على و و.

وبحذف الثابت ما بين المعادلتين السابقتين نجد العلاقة: 

وهذه العلاقة لا تحتوي على الثابت وإنما تحتوي على المتحول والتابع والمشتق الأول فهي المعادلة التفاضلية المنشودة.

المعادلة الجبرية التابعة لثابتين:

هي من الشكل: 

ولإيجاد معادلتها التفاضلية نشتق مرتين بعدد الثوابت فنحصل على المعادلتين التاليتين:





وبحذف  و  من المعادلات الثلاث نحصل على معادلة من الشكل:

 وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية.

المعادلة الجبرية التابعة ل  من الثوابت وهي من الشكل:



ولإيجاد معادلتها التفاضلية نشتق  مرة فنجد:







وبحذف هذه الثوابت بين المعادلات نحصل على معادلة تفاضلية من الشكل:



وهي معادلة تفاضلية من الرتبة ويبرهن بسهولة أن كل تابع من مجموعة التوابع هو حل للمعادلة الناتجة.

لذلك تدعى المعادلة الجبرية بمجموعة حلول المعادلة التفاضلية أو الحل العام للمعادلة التفاضلية وبالعكس إذا كان هناك معادلة تفاضلية من المرتبة  فإن حلها تابع ل ثابت كيفي وكل حل لا يتواجد في صيغة الحل العام يدعى حللا منعزلا. (سأتحدث لاحقا عن الحلول بالتفصيل).

## ***حل المعادلات التفاضلية:***

كما ذكرنا سابقا يوجد لدينا الكثير من الأنواع للمعادلة التفاضلية:

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:



وليكن التابع  المعرف على المجال غير الخالي  و القابل للاشتقاق  مرة من أجل أي  فنقول عن التابع  بأنه حل (أو تكامل) للمعادلة التفاضلية (1) إذا تحقق الشرطان التاليين:



وسنسميهما بالشرطين الأساسيين فإن تحقق الشرط الأول ضروري وذلك لكي نتمكن من حساب قيمة التابع  في النقطة  ونسمي هذا النوع من الحلول بالحل الظاهري وسنطلق عليه اختصارا كلمة حل. حيث المجال  يدعى مجال تعريف الحل، أما المنحني الذي يمثله التابع فنسميه بالمنحني التكاملي للمعادلة التفاضلية.

نقول عن العلاقة:



بأنها حل للمعادلة التفاضلية (1) على شكل تابع ضمني (أو اختصارا بحل ضمني) معرف على المجال  إذا تحقق الشرطان:

1. إذا عرفت العلاقة على الأقل تابعا حقيقا بدلالة المتحول  من الشكل  على المجال  بحيث ان 
2. إذا كان  حلا للمعادلة التفاضلية (1) وذلك مهما يكن 

نقول عن التابعين: 

التابعين المعرفين والقابلين للاشتقاق  مرة في مجال ما  لتحولات  بأنهما حل للمعادلة التفاضلية (1) إذا حققتا الشرطين الأساسيين وعندها نقول إن التابعين يمثلان حلا للمعادلة بشكل وسيطي.

### ***أنواع الحلول للمعادلات التفاضلية:***

الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية 

يعطى بشكله الظاهري بعلاقة من الشكل التالي: 

كما يعطى بشكله الضمني بعلاقة من الشكل: 

كميا يعطى بشكله الوسيطي بعلاقتين من الشكل التالي:  و 

حيث  ثوابت اختيارية مستقلة عن بعضها وعددها مساو لمرتبة المعادلة نفسها.

فالحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة هو حل يحتوي على من الثوابت الاختيارية ويسمى أيضا التكامل العام .

نسمي التابع  حلا خاصا للمعادلة التفاضلية (1) إذا أمكن الحصول عليه من الحل العام بإعطاء الثوابت الكيفية قيما عددية بما فيها .

إن أي حل لمعادلة تفاضلية لا يتواجد في صيغة الحل العام مهما كانت قيم الثوابت بما فيها  يسمى حلا منعزلا أو منفردا (او شاذا) للمعادلة التفاضلية.

## ***المعنى الهندسي للمعادلة التفاضلية:***

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق:

حيث أن التابع  معرف على المجموعة المفتوحة والغير خالية  ويأخذ قيمة في  ومستمر ووحيد التعيين (أي بأخذ قيمة واحدة في أي نقطة ) وبالنظر إلى  كإحداثيات نقطة في المستوي  يمكن تمثيل كل حل (أو تكامل)  للمعادلة التفاضلية (1) بمنحن في المستوي  سميناه منحنيا تكامليا لهذه المعادلة.

إن المعادلة التفاضلية (1) تربط بين احداثيات النقطة الواقعة على المنحني التكاملي لهذه المعادلة وميل المماس في تلك النقطة.

بما أن ميل المماس في أي نقطة يساوي قيمة المشتق فيها لذلك بالاعتماد على المعادلة (1) نجد أن ميل المماس في النقطة  يساوي .

وهكذا يمكننا معرفة ميل المماس في كل نقطة من أي منحني تكاملي للمعادلة التفاضلية (1).

نسمي المستوي (أو جزء منه) بعد أن نرسم في كل نقطة من نقاطه قطعاً مستقيمة ممثلة للمماسات فيها بحقل الاتجاهات.

إذا أعطينا للمشتق  قيمة ثابتة  فإن مجموعة النقاط المحققة للمعادلة  تشكل منحني في المستوي  ميل المماسات في جميع نقاطه متساوية وتساوي  .

نسمي المنحنيات المختلفة التي نحصل عليها نتيجة لإعطاء  قيماً مختلفة بالخطوط المتساوية الميل.

من شرط الاستمرار المفروض على التابع  ينتج أن حقل الاتجاهات مستمر أيضاً، وهذا يعني أنه إذا كانت النقطتين قريبتين من بعضهما فإن الميلين فيهما يكونا قريبين أيضاً من بعضهما، وشرط وحدانية التعيين المفروض على  ينتج أن المنحنيات التكاملية للمعادلة التفاضلية (1) لا يمكن أن تتقاطع. ضمن هذه الشروط إذا رسمنا حقل الاتجاهات (في عدد كاف من النقاط) فإننا نستطيع أن نتصور بل نرسم المنحنيات التكاملية للمعادلة(1)، وذلك برسم المنحنيات التي تكون المماسات في كل نقطة من نقاطها مطابقة للقطع المستقيمة المرسومة في تلك النقاط.

**ملاحظة:**

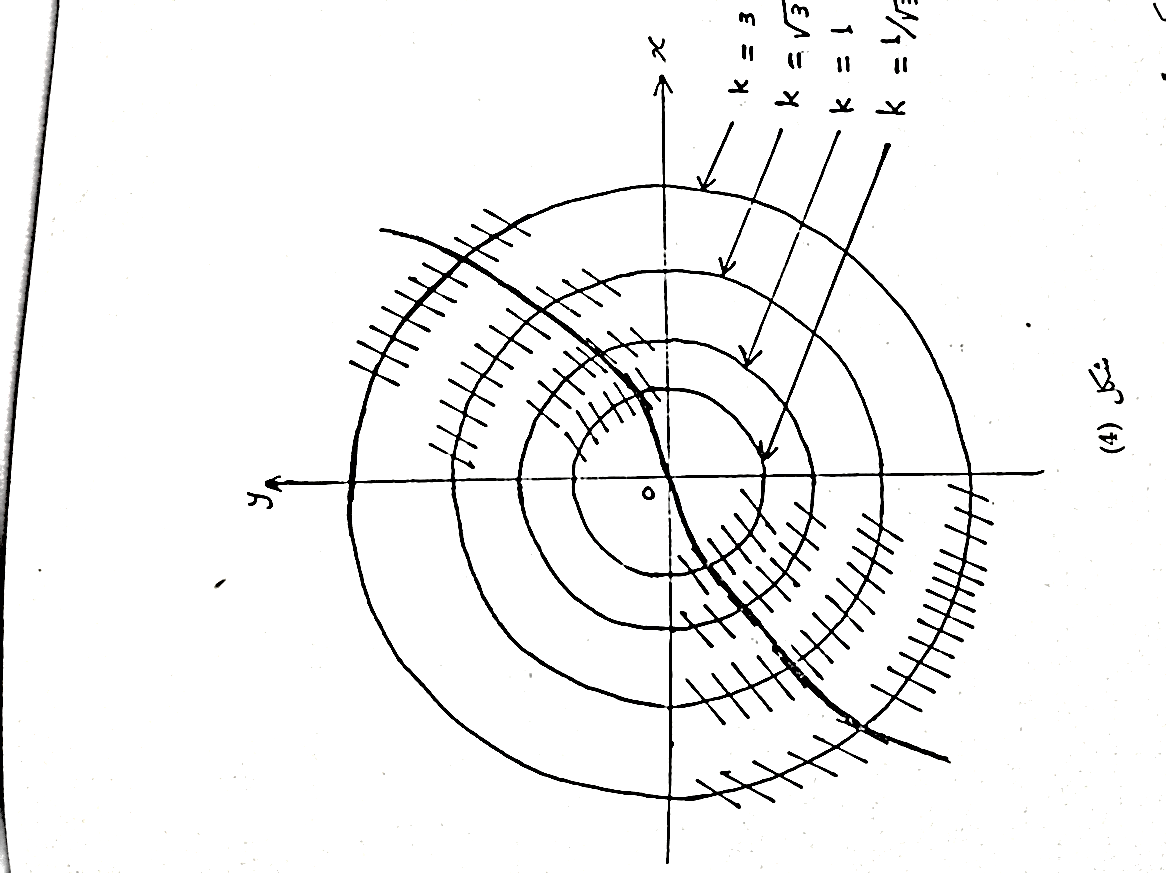
لتعيين حقل الاتجاهات في جوار النقاط التي يسعى فيها  إلى اللانهاية نأخذ المعادلة التفاضلية:



أي تعتبر تابعاً و متحولاً.

إذا كان  يشكل عدم تعيين من الشكل في النقطة أو تكون المنحنيات التكاملية متقاربة إلى هذه النقطة وهذا يكافئ قولنا:

 عندما أو عندما.

مثال: ارسم حقل الاتجاهات للمعادلة التفاضلية  ثم بين بالرسم كذلك شكل المنحني التكاملي المار بمبدأ الاحداثيات.

رسم توضيحي 1

إن المعادلة العامة للخطوط متساوية الميل (بتعويض كل  ب) :  لرسم الخطوط نعطي ل  قيما عددية تمثل مربع نصف قطر الدائرة من أجل نحصل على دائرة نصف قطرها  ومركزها مبدأ الاحداثيات وميل المماسات للمنحنيات التكاملية في كل نقطة من نقاط الدائرة المذكورة يساوي  وبالتالي تصنع هذه المماسات مع المحور  زاوية .

لذلك نرسم في كل نقطة من نقاط الدائرة المذكورة قطعاً مستقيمة صغيرة تصنع زاوية  مع المحور ، وبالمثل مع جميع قيم .

## ***المعادلات التفاضلية الغير محلولة بالنسبة للمشتق:***

الشكل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى غير المحلولة بالنسبة للمشتق هو:



ان حلول هذه المعادلات على الأغلب إما أن يكون لها الشكل الضمني أو الشكل الوسيطي، حيث نقول ان التابعين:

 && 

يمثلان حلاً وسيطياً للمعادلة (1) إذا تحققت المطابقة التالية من أجل جميع قيم :



إذا تحققت المطابقة السابقة من أجل جميع قيم  المنتمية للمجال  فقط فإن التابعين المذكورين يمثلان حلاً وسيطياً للمعادلة (1) ضمن هذا المجال.

فيما يلي سنتعرض لبعض أنواع المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى وغير المحلولة بالنسبة للمشتق وهي:

* المعادلات التفاضلية التي يمكن حلها بالنسبة ل .
* المعادلات التفاضلية التي لا تحوي  أو لا تحوي .
* المعادلات التفاضلية القابلة للحل بالنسبة ل .
* المعادلات القابلة للحل بالنسبة ل .

### ***المعادلات التفاضلية التي يمكن حلها بالنسبة ل :***

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:



في بعض الحالات يمكن حل المعادلة ... بالنسبة للمشتق  وبالتالي يمكن كتابتها بالشكل:



في هذه الحالة نحصل على  معادلة تفاضلية محلولة بالنسبة للمشتق  هي :



من اجل إيجاد التكامل العام للمعادلة التفاضلية... نوجد التكامل العام لكل معادلة تفاضلية من المعادلات السابقة على حده بالتالي نحصل  تكامل عام :



في هذه الحالة يكون التكامل العام للمعادلة التفاضلية هو:



مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية .

بالاعتماد على المميز تكتب المعادلة بالشكل.

بالتالي نحصل على المعادلتين &&.

والحل العام لهما على الترتيب &&.

إذن التكامل العام المطلوب.

ملاحظة:

إن أغلب المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى والدرجة الثانية يمكن حلها، اعتماداً على المميز، بالنسبة للمشتق  وبالتالي يمكن إيجاد تكاملها العام حسب الطريقة السابقة، ويوضح ذلك المثال القادم.

إذا كانت المعادلة التفاضلية لا تحوي إلا المشتق  فقط أي لها الشكل 

فإن تكاملها يعطى بالعلاقة:

إن المعادلة تكتب بالشكل:



بذلك نحصل على  معادلة تفاضلية هي:

بمكاملة المعادلة  نحصل على الحل العام التالي:

 أو 

بالتالي يكون التكامل العام الطلوب هو:



نلاحظ بسهولة أن التكامل العام ينتج من المعادلة (1) بتعويض كل  ب  وهو المطلوب.

مثال: أوجد التكامل العام للمعادلة التفاضلية: 

المعادلة تكتب بالشكل 

بالتالي نحصل على ثلاث معادلات تفاضلية هي &&&&

والحل العام لها بالترتيب &&&&

التكامل العام للمعادلة الأصلية يساوي 

## ***المعادلات التفاضلية التي لا تحوي أو لا تحوي :***

### ***أولا المعادلات التفاضلية التي لا تحوي:***

إن شكل هذه المعادلات العام هو 

الحل العام لهذه النوع من المعادلات يعطى على الأغلب وسيطياً وطريقة إيجاده كما يلي

نفرض  حيث  تابع  ثم بالاعتماد على المعادلة ... نحسب قيمة  بدلالة  ولتكن .

يمكن أن نفرض في البداية بشكل معاكس  ، ثم بالاعتماد على المعادلة ... نحسب  بدلالة  فنجد قيمة

ولتكن  المهم انه في كلا الحالتين نحصل على التمثيل الوسيطي & 

من العلاقة الأولى نجد 

من العلاقة الثانية نجد 

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية 

بالمكاملة نجد 

إن الحل العام المطلوب يعطى وسيطيا بالعلاقتين

& 

إذا تمكنا من حذف الوسيط  بين المعادلتين السابقتين محصل على التكامل العام ديكارتيا.

ملاحظة:

يجب التنبيه هنا إلى أن اختيار التمثيل الوسيطي بشكل مناسب على الأغلب يسهل ويبسط حساب التكاملات التي ترد فيما بعد لذلك عندما نختار التابع  مثلاً يجب أن يتم الاختيار بحيث يسهل حساب التابع  من المعادلة .. وبحيث تسهل التكاملات التي تصادفنا أثناء الحل أيضا.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: 

نضع المعادلة على الشكل: 

ثم نفرض أن  ومنها نجد  وبالتعويض في المعادلة نجد:  أي أن : 

بالاستفادة من العلاقة الأساسية  نجد: 

وهذه تكتب بالشكل المختصر التالي: 

وبالمكاملة ينتج: 

ويكون الحل العام وسيطيا للمعادلة التفاضلية الأصلية معينا بالعلاقتين:

&& 

***ثانيا ً: ان المعادلات التفاضلية التي لا تحوي :***

إن شكل هذه المعادلات العام هو:



لإيجاد الحل العام لهذا النوع من المعادلات نسلك نفس الطريق الذي اتبعناه في الحالة الأولى حيث نفرض في البداية ثم بالاعتماد على المعادلة .... نجد قيمة  بدلالة  ولتكن مثلا 

كما أننا يمكن أن نفرض أولاً  ثم من المعادلة ... نحسب المهم في كلا الحالتين نحصل على التمثيل الوسيطي

 &

من العلاقة الأولى نجد

من العلاقة الثانية نجد 

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية 

بالمكاملة نجد



إذن الحل العام المطلوب يعطى وسيطياً بالعلاقتين

 & 

اذا حذفنا  بين المعادلتين السابقتين نحصل على التكامل العام ديكارتياً.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: 

الحل المعادلة المعطاة الخالية من المتحول  ويمكن كتابتها كالتالي:



وهذه نفرقها إلى المعادلتين التاليتين:

,

فإذا كان  فبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد  حل للمعادلة أما إذا كان:



فنفرض  فيكون  وبالتعويض نجد : ,

ولكن  إذن  وبالتعويض نجد المعادلة التفاضلية:



وبالمكاملة نجد الحل العام يعطى بالعلاقتين:

,

أما الحل الذي وجدناه سابقا وهي  فهو حل منعزل لعدم وجوده في الحل العام

## ***المعادلات التفاضلية القابلة للحل بالنسبة ل :***

الشكل العام للمعادلات القابلة للحل بالنسبة ل  هو

من اجل إيجاد الحل العام لهذا النوع من المعادلات نفرض  ثم نعوض في المعادلة .. فنحصل على المعادلة 

باشتقاق المعادلة ... بالنسبة ل  نحصل على المعادلة التفاضلية



ان المعادلة التفاضلية الناتجة هي معادلة محلولة بالنسبة للمشتق وبالتالي يمكن إيجاد حلها العام اذا كانت من احدى الأنواع المدروسة سابقاً

إذا كان  الحل العام لهذه المعادلة فان الحل العام للمعادلة الاصلية .. يعطى وسيطيا بالعلاقتين

&

بحذف الوسيط بين العلاقتين السابقتين نحصل على الحل ديكارتيا

ملاحظة:

إذا كان التابع  حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية فإن التابع  قد يكون حلا شاذا للمعادلة التفاضلية.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية: 

الحل: نفرض أن  ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد العلاقة: 

بالاشتقاق بالنسبة ل  نحصل على المعادلة التفاضلية: 

وهذه تفرق إلى معادلتين فإما أن يكون: , 

وبالمكاملة نجد  وبالتالي نحصل على الحل العام وسيطيا.

,

بحذف  بين العلاقتين نحصل على الحل العام ديكارتيا

أو يكون  ومنها نجد  أو  والتابع  يصبح من الشكل  ونلاحظ أن هذا الحل غير موجود في صيغة الحل العام السابقة لذلك فهو حل منعزل للمعادلة المعطاة.

***المعادلات القابلة للحل بالنسبة ل ***

الشكل العام لهذا النوع من المعادلات التفاضلية هو 

من اجل إيجاد الحل العام لهذه المعادلة نفرض  ثم نعوض في (1) فنجد 

نشتق المعادلة بالنسبة ل  ثم نعوض  ب  فنحصل على المعادلة التفاضلية 

المعادلة التفاضلية ... معادلة محلولة بالنسبة للمشتق وفيها  المتحول المستقل و التابع بفرض التكامل العام لهذه المعادلة هو 

فان الحل العام للمعادلة الأصلية يعطى وسيطيا بالعلاقتين

 & 

إذا حذفنا بين العلاقتين السابقتين نحصل على الحل العام ديكارتيا

**ملاحظة:**

إذا كان التابع  حلا شاذا للمعادلة التفاضلية فإن التابع  قد يكون حلا شاذا للمعادلة التفاضلية الأصلية

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:



الحل: إن هذه المعادلة محلولة بالنسبة ل . لذلك نفرض أن  ومن ثم نشتق طرفيها بالنسبة ل  فنجد :



إذا رتبنا هذه المعادلة وأصلحناها نجد: 

إن  لا يمكن أن يكون معدوما من أجل قيم حقيقية ل  (وذلك لآننا نبحث عن حلول حقيقية) فلنقسم طرفي المعادلة على هذا المقدار ينتج: 

بمكاملة المعادلة السابقة نجد  إذا حذفنا  بين هذه المعادلة والمعادلة الأصلية نجد الحل العام التالي: 

### **التمثيل الوسيطي:**

وعندما لا تنفح الطرق السابقة نلجأ إلى الى طريقة التمثيل الوسيطي وهي:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية (1) وإذا استبدلنا  ب  فإن المعادلة(1) تمثل سطحا  معادلته:

 , 

وإذا كان  حلا (أو منحنا تكامليا) للمعادلة التفاضلية (1) نجد أن المعادلات الوسيطية:



تمثل منحنيا في الفضاء  واقعا على السطح وذلك لأن  وأن مسقط هذا المنحني الفراغي على المستوي  هو المنحني التكاملي الممثل بالحل  للمعادلة التفاضلية (1).

ينتج من هذا أنه يوجد من أجل كل حل (أو كل منحن تكاملي) للمعادة التفاضلية (1) منحن فراغي في واقع على السطح ويحقق العلاقة 

والتي نسميها بالعلاقة الأساسية. وبالعكس إذا كان  منحنيا في واقعا على السطح وممثلا وسيطيا بالمعادلات:  ومحققا العلاقة (2) عندها يكون

وذلك لأن واقع على السطح ومن جهة أخرى بما أنه يحقق العلاقة (2)  \وهذا يعطينا 

فيكون عندها 

وهذا يعني أن المنحني المستوي الممثل وسيطيا بالمعادلتين: ,

وهو حل للمعادلة التفاضلية (1) وهو بنفس الوقت مسقط المنحني على المستوي 

# ***الخاتمة***:

1. لقد تعرفنا على أهمية المعادلات التفاضلية ومعناها ومعنى وجودها في الحياة.
2. لقد تعرفنا على المعنى الهندسي للمعادلات التفاضلية
3. لقد تعرفنا على المعادلات الغير محلولة بالنسبة للمشتق وعلى طرق حلها
4. يستطيع من يريد إكمال البحث بالذهاب في مجال المسارات المتعامدة
5. إن الشكل العام للمعادلة التفاضلية ذات الدرجة العالية هو  و بوضع  تصبح على الشكل التالي  وهي معادلة جبرية وهنا نميز بين الحالات التالية:

إذا أمكن تفريق المعادلة إلى عوامل من الدرجة الأولى بالنسبة ل  أي إذا أمكن كتابتها بالشكل:  من اجل إيجاد التكامل العام نوجد التكامل العام لكل معادلة تفاضلية من المعادلات السابقة وبالتالي نحصل على تكامل عام:



وفي هذه الحالة يكون التكامل العام للمعادلة التفاضلية الأصلية هو:

1. إذا كانت المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة للتابع  (أي محلولة بالنسبة للتابع ) تكتب على الشكل:

 باشتقاقها بالنسبة ل  تصبح معادلة خطية بالنسبة للتابع والمتحول .

1. إذا كانت المعادلة محلولة بالنسبة للمتحول المستقل تكتب على الشكل  ولإيجاد حلها نشتق بالنسبة للتابع  فتتحول لمعادلة محلولة بالنسبة للمشتق.
2. إذا لم تكن المعادلة من الأشكال السابقة نسعى لتفريقها إلى مجموعة من المعادلات كل منها من أحد الاشكال السابقة ونحلها بالطرق المتبعة في كل منها وإذا لم نستطع نلجأ للطريقة العامة المسماة بالتمثيل السطحي.

وذلك بإيجاد السطح الناتج من المعادلة بعد تعويض كل  ب  فنجد أن المعادلة تصبح على الشكل 

ثم نختار تمثيلا لهذا السطح. ونشكل منه المعادلة التفاضلية  و التي تعرف بالعلاقة الأساسية فنحصل على معادلة محلولة بالنسبة للمشتق

# ***المراجع :***

1. د. حسن نقار\_المعادلات التفاضلية\_جامعة حلب\_كلية الهندسة\_1977م
2. د.زيد الأمير\_ المعادلات التفاضلية(1)\_جامعة حلب\_كلية العلوم\_2003م
3. د.محمد وداد طرابيشي\_المعادلات التفاضلية\_منشورات جامعة حلب

***المحتويات***

[***المقدمة:*** 1](#_Toc439749326)

[***خطة البحث:*** 2](#_Toc439749327)

[***تشكيل المعادلات التفاضلية العادية:*** 5](#_Toc439749328)

[***أولا: تشكيل المعادلات التفاضلية من المسائل الرياضية أو الفيزيائية أو الميكانيكية:*** 5](#_Toc439749329)

[لذلك تدعى المعادلة الجبرية بمجموعة حلول المعادلة التفاضلية أو الحل العام للمعادلة التفاضلية وبالعكس إذا كان هناك معادلة تفاضلية من المرتبة  فإن حلها تابع ل ثابت كيفي وكل حل لا يتواجد في صيغة الحل العام يدعى حللا منعزلا. (سأتحدث لاحقا عن الحلول بالتفصيل). 6](#_Toc439749330)

[***حل المعادلات التفاضلية:*** 7](#_Toc439749331)

[***أنواع الحلول للمعادلات التفاضلية:*** 8](#_Toc439749332)

[***المعنى الهندسي للمعادلة التفاضلية:*** 9](#_Toc439749333)

[***المعادلات التفاضلية الغير محلولة بالنسبة للمشتق:*** 11](#_Toc439749334)

[***المعادلات التفاضلية التي يمكن حلها بالنسبة ل :*** 12](#_Toc439749335)

[***المعادلات التفاضلية التي لا تحوي  أو لا تحوي :*** 14](#_Toc439749336)

[***أولا المعادلات التفاضلية التي لا تحوي:*** 14](#_Toc439749337)

[***المعادلات التفاضلية القابلة للحل بالنسبة ل :*** 18](#_Toc439749338)

[**التمثيل الوسيطي:** 21](#_Toc439749339)

[***الخاتمة***: 22](#_Toc439749340)

[***المراجع :*** 23](#_Toc439749341)