|  |  |
| --- | --- |
| تقديم الطالب / مارك مروان جبور | بإشراف الآنسة : يمار الحموي |
| الصف الثاني ثانوي | تاريخ / -- / -- / --- |
| مقرر الرياضيات |  |

تركز حلقة البحث هذه على الفجوة الكبيرة بين الحياة المسيحية المعاصرة والحياة المسيحية الحقيقية، وكيفية إزالة هذه الفجوة من خلال الفرد والكنيسة مأكدين أن يسوع الراعي الصالح لن يترك خرافه تضل.



**أعداد كاتالان ...**

**تقرير لحلقة بحث بعنوان :**

|  |
| --- |
| قائمـة الموضـوعات |
|  | الموضـــــــــــــوع | رقم الصفحة |
|  | **مقدمة عامة للبحث ...........................................** | 3 |
|  | **إشكالية البحث ...............................................** | 3 |
|  | **المصطلحات المتعلقة بالبحث ................................** | 4 |
| البـاب الأول : | التعرف على أعداد كتلان | **5** |
| الفصل الأول : | **صيغة أعداد كتلان**  | **5** |
| 1.1 | **صيغة سغنر العودية ( *Segner’s Recursive Formula* )** | 5 |
| 2.1 | **استنتاج صيغة مباشرة انطلاقاً من الصيغة العودية** | 5 |
| 3.1 | **طريقة أخرى لاستنتاج صيغة مباشرة** | 6 |
| الفصل الثاني : | **بعض التطبيقات الشهيرة**  | **8** |
| 1.2 | **المسألة الأولى : (*Parenthesize problem* )** | 8 |
| 2.2 | **المسألة الثانية :** **مسألة سلاسل الأصفار والواحدات (*Binary strings*  )** | 9 |
| 3.2 | **المسألة الثالثة : (*non-crossing handshake* )** | 10 |
| 4.2 | **المسألة الرابعة : ) *Lattice paths*)** | 10 |
| الباب الثاني : | **تقريبات أعداد كتلان** | **14** |
| الفصل الثالث : | **حدود وانغ ( *Wang's bounds* )** | **11** |
| الفصل الرابع : | **تقريب ستيرلينغ** ( ***Stirling's approximation*** ) | **12** |
|  | **نتيجة الباب الثاني** | 14 |
| الباب الثالث : | **العلاقة بين أعداد كتلان والأعداد الأولية** |  |
| الفصل الخامس | **أعداد كتلان *mod 2*** | 15 |
| 1.5 | **زوجية أعداد كتلان** | 15 |
| 2.5 | **أعداد كتلان الفردية *mod 2k*** | 15 |
| الفصل السادس | **القواسم الأولية لأعداد كتلان** | 18 |
| 1.6 | **أولية أعداد كتلان** | 18 |
| 2.6 | **أعداد كتلان التي لا تقبل القسمة على عدد أولي محدد** | 18 |
|  |  |  |
|  | **خاتمة البحث** | 22 |
|  | **فهرس الصور** | 23 |
|  | **فهرس الجداول** | 24 |
|  | **المصادر والمراجع** | 24 |

**مقدمة عامة . ...**

أعداد كتلان هي متتالية عددية شهيرة تعود للقرن الثامن العشر .. حيث طرح في عام 1751 العالم (***Leonhard Euler***) مسألة تهدف لإيجاد عدد طرق تقسيم مضلع ذو *n* ضلعاً إلى مثلثات غير متقاطعة في المساحة، ليتمكن قيما بعد من إيجاد صيغة للإجابة على السؤال السابق بمساعدة (***Christian Goldbach*** *,* ***Johann Andreas von Segner***) .... وفي عام 1838 قام الرياضي (***Eug`ene Charles Catalan***) بنشر عدة مقالات تتحدث عن المتتالية أحدها يثبت أن أعداد كتلان توجد عدد طرق وضع *n* زوج من الأقواس حول جداء *n+1* عدد بحيث يضم كل زوج عملية جداء واحدة . ومن الشائع أن الصين كانت هي الأسبق لاكتشاف تلك المتتالية على يد الرياضي (***Antu Ming***) الذي قام بإيجاد عدد صيغ عودية لأعداد كتلان في ثلاثينيات القرن الثامن عشر وبدأ بكتاب (***Efficient Methods for the Precise Values of Circular Functions***) أنهي الكتاب على يد طالبه (***Chen Jixin***) في عام 1774 لكن لم يتم نشره إلى 1839.

أهم ما يميز تلك المتتالية هو ظهورها كإجابة لعدد هائل من مسائل العد، حيث لاحظنا في ما سبق ظهورها في مسألتين مختلفتين كلياً وهذا ما دفع ( ***RICHARD P. STANLEY*** ) الأستاذ الدكتور في الرياضيات التطبيقية لنشر كتاب يدعى (***Catalan numbers***) أحد أبرز محتوياته هو 214 مسألة مختلفة تعد من قبل أعداد كتلان . وفيما يلي نعرض أول عشر حدود :

**إشكالية البحث :**

* **هل يوجد تفسير منطقي لتعدد المسائل التي تظهر أعداد كتلان كإجابة عنها ؟**
* **نلاحظ مما سبق النمو السريع لأعداد كتلان .. إلى أي مدى يمكن تقريب أعداد كتلان ؟**
* **كيف يمكن استنتاج القواسم الأولية للحدود الكبيرة لأعداد كتلان دون الحاجة لحسابها ؟**

المصطلحات المتعلقة بالبحث ...

 **:** هو عدد كتلان ذو الرقم .

**تثليث المضلع :** تقسيمه لمثلثات غير متقاطعة (لا تشغل مساحات مشتركة) رؤوسها هي رؤوس المضلع .

 **:** هو الجداء .

**صيغة ذات الحدين المعممة :**  .

**التابع المولد لمتتالية :** .

**صيغة ماكلورين** :  *.*

\

 : إذا وفقط تحقق و .

 : هو .

 : هي دالة كرونكر المعرفة وفق العلاقة : .

 :هي دالة منطلقها مجموعة الأعداد الصحيحة غير المعدومة ( عدد أولي)

 .

 : وهو تعميم الدالة السابقة السابقة على الأعداد النسبية غير المعدومة .

 : .

 : هي متتالية معرفة وفق العلاقة العودية :

الباب الأول : التعرف على أعداد كتلان :

الفصل الأول : صيغة أعداد كتلان :

**1. 1 صيغة سغنر العودية ( *Segner’s Recursive Formula* ) :**

**الإثبات :**

نفرض أن هو عدد طرق تثليث المضلع بمثلثات أحدها المثلث الذي رؤوسه *i,n+1,n+2* ومنه (لأن هو عدد طرق تثليث المضلع بمجموعة مثلثات تحوي جميع المثلثات التي يمكن تشكيلها والحاوية الضلع *n+1,n+*2 بمعنى آخر عدد طرق تثليث المضلع) .

نلاحظ أن المثلث يقسم المضلع لمضلعين مختلفين ، فيكون هو جداء عدد طرق تثليث الأيمن () مضروباً بعدد طرق تثليث الأيسر ()أي ومنه تنتج العلاقة.[[1]](#footnote-1)

**1. 2 استنتاج صيغة مباشرة انطلاقاً من الصيغة العودية :[[2]](#footnote-2)**

**صورة (1) :** توضيح لإثبات صيغة سغنر العودية.

نفرض أن هو التابع المولد (Generating function) لأعداد كتلان فنستنتج أن :

ومنه سنقوم أولاً بتحديد الإشارة الصحيحة :

 باستخدام صيغة ذات الحدين المعممة المعممة نصل إلى:

إذا كان وهذا تناقض *( لأن جميع الحدود في الطرف الأيسر ستكون سالبة الإشارة عدا الحد الأول ونحن نعلم أن أعداد كتلان موجبة ) .*

*إذاً*

ومنه

بمطابقة الأمثال نجد :

**1. 3 طريقة أخرى لاستنتاج صيغة مباشرة :**

سنقدم عبر مجموعة من الموضوعات طريقة لاستنتاج الصيغة المباشرة انطلاقاً من مسألة أولر (تثليث مضلع ذو *n+2* ضلعاً) وبجميع الموضوعات سنرقم رؤوس المضلع بالشكل .

**الموضوعة 1 :** عند تثليث مضلع هناك قطر واحد على الأقل من الأقطار المنشأة يصل بين رأسين لا يفصل بينهما سوى رأس واحد .

**الإثبات :** ­ *نفرض أن أقل عدد من الرؤوس الفاصلة بين رأسين موصولين بقطر منشأ هو عند إذ لن يكون المضلع* مثلثاً (إذا كان القطر هو ) ,لذا لمتابعة تثليث الشكل الأصلي لابد من تثليث المضلع الناتج، و لا يمكن ذلك إلا إذا وصلنا على الأقل رأسين من رؤوسه مع بعضهما وسيكون عدد الرؤوس الفاصلة بينهما أقل من *k* وهذا تناقض .

**الموضوعة 2 :** لتثليث مضلع ذو *n+2* ضلع نحتاج *n-1* قطر تماماً :

**صورة (2) :** توضيح لإثبات الموضوعة 1

**الإثبات بالاستقراء الرياضي :**

1. القضية صحيحة من أجل *n=1* لأن تثليث مثلث لن يحتاج لرسم أي قطر .
2. نفرض صحة القضية من أجل *n* .
3. نثبت صحة القضية من أجل *n+1* .

بالاعتماد على الموضوعة 1 هناك رأسين يصل بينهما قطر، فتكون الأقطار المرسومة لتثليث المضلع هي ذلك القطر مضافاً إليه الاقطار اللازمة لتثليث المضلع لكن هذا المضلع له *n+2* رأس إذاً حسب الخطوة (ب) عدد الأقطار اللازمة لتثليث المضلع السابق هو *n-1* ومنه عدد الأقطار اللازمة لتثليث المضلع الأصلي هو *فالقضية صحيحة .*

**الموضوعة 3 :**عند تثليث مضلع ذو *n+2* ضلعاً حيث يوجد على الأقل قطرين كالقطر المذكور بالموضوعة 1.

**الإثبات بالاستقراء الرياضي :**

1. القضية صحيحة من أجل *n=3* .(تجريبياً)
2. نفرض صحة القضية من أجل *n* .
3. نثبت صحة القضية من أجل *n+1* .

بالاعتماد على الموضوعة 1 ,نصل القطر الأول من ذلك الشكل، فيتشكل مثلث ومضلع ذو n+2 رأس، وحسب الخطوة (ب), تثليث ذلك المضلع سيعطي قطرين من الشكل المطلوب، و بأسوأ الأحوال سيشكل أحدهما مثلثاً يحوي القطر الأول وعندها سيكون هناك قطرين على الأقل يحققان الخاصة المطلوبة في المضلع الأصلي.

**الموضوعة 4 :** *عدد المثلثات الناتجة عن تثليث مضلع ذو n+2 رأس هو n .*

**الإثبات :**

*بالاستقراء الرياضي بذات الطريقة التي أثبتت فيها الموضوعة 2 .*

**الموضوعة 5 :[[3]](#footnote-3)**

**الإثبات :**  *ندعو الضلع بالقاعدة .*

*فيكون عدد طرق تثليث مضلع ذو n+2 رأس وتوجيه أحد أضلاعه أو الأقطار المستخدمة في تثليثه هو : .(بالاعتماد على مبدأ الضرب والموضوعة 2)وندعو ذلك بالمجموعة .*

**صورة (3) :** توضيح للمجموعة الأولى في التقابل المستخدم بالموضوعة 5

*ويكون عدد طرق تثليث مضلع ذو n+3 رأساً واختيار ضلع من أضلاعه عدا القاعدة هو .و ندعو ذلك بالمجموعة*

 *نعرف أو التحويل الذي ينقل عنصر من A إلى عنصر من B هو مد القطعة المستقيمة الموجهة من الجهة المختارة فإذا كانت الجهة هي جهة ننشأ القطعة المستقيمة و نضيف واحد لترقيم الرؤوس التالية .*

 *أو التحويل المعاكس للتحويل السابق، نأخذ الضلع المختارة ولتكن ستكون أحد اضلاع مثلث نحذف نجعل الضلعين الباقيين في المثلث منطبقين عند ونوجههما إليها ، ونطرح واحد من ترقيم الرؤوس التالية .*

*كلا التحويلين السابقين هو تابع لأنه يربط كل عنصر من المنطلق بعنصر واحد فقط من المستقر، وبما أن تابعين يمكن القول أن هو تابع تقابل ومنه تنتج ­­­­­­­صحة المساواة .*

**صورة (4) :** توضيح للمجموعة الثانية في التقابل المستخدم بالموضوعة 5

**الموضوعة 6 :** أثبت أن *.*

*من الموضوعة 5 نستنتج أن :*

**نثبت العلاقة بالاستقراء الرياضي :**

1. فالقضية صحيحة من أجل *n=1 .*
2. نفرض صحة القضية من أجل *n* .
3. نثبت صحة القضية من أجل *n+1* .

الفصل الثاني : بعض التطبيقات الشهيرة :

2. 1 **المسألة الأولى : (*Parenthesize problem* ) :**

 *حلت هذه المسألة في عام 1838 من قبل* ***Eug`ene Charles Catalan*** *و تعد من أحد الأسباب لحمل المتتالية لاسمه .*

***طلب المسألة :*** *ما هو* *عدد طرق وضع n زوج من أقواس على جداء n+1 عدد بشرط أن يضم كل قوس عملية جداء واحدة؟؟.*

**الإثبات :** *لإثبات أن هو حل المسألة نوجد تقابل بين مسألة تثليث المضلع وهذه المسالة .*

*نرمز للأضلاع عدا القاعدة ب ،كل قطر يشكل مثلثاً مع ضلعين متجاورين يعبر عنه بـ (وقد أثبتنا بالموضوعة 3 وجود على الأقل قطرين من هذا الشكل),والأقطار الأخرى تمثل بالطريقة ذاتها بالإعتماد على تمثيل الأقطار المجاورة، ونتابع هكذا حتى نحصل على تمثيل لقاعدة المضلع, هذا التمثيل هو طريقة لوضع الأقواس على n+1 عملية جداء . نلاحظ أنه يمكن عكس هذه العملية، فإذا أخذنا أقواس موضوعة وفق الشروط، نبدأ بالأقواس الموضوعة على جدائين متتالين ونصل القطر المقابل ونتابع بهذا الشكل، ومنه نستنتج أن هذه العملية تمثل تابع تقابل .[[4]](#footnote-4)*

**صورة (5) :** توضيح التقابل المستخدم لإثبات المسألة الأولى

2. 2 **المسألة الثانية : مسألة سلاسل الأصفار والواحدات (*Binary strings*  ) :**

***طلب المسألة :*** *ما هو**عدد السلاسل المشكلة من n 1,و n 0 بحيث يكون عدد الواحدات أكبر أو يساوي عدد الأصفار بأي نقطة ؟؟.*

**الإثبات :** *لإثبات أن هو حل المسألة نوجد تقابل بين مسألة وضع الأقواس وهذه المسالة .*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 111000 | (((X0 X1 X2 | (((X0 X1) X2)X3) |
| 110100 | ((X0 (X1 X2 | ((X0(X1 X2))X3) |
| 101100 | (X0((X1 X2 | (X0((X1 X2)X3)) |
| 110010 | ((X0 X1 ( X2 | ((X0 X1)(X2 X3)) |
| 101010 | (X0( X1 ( X2 | (X0(X1( X2 X3))) |

*إذا أخذنا n+1 عدد مضروباً وقد وضعت عليها الأقواس وفق الشروط، نحذف العدد الأخير مع الأقواس المتجهة إلى اليسار لنحصل على سلسلة من n قوس و n عدد , ونلاحظ إمكانية عكس هذه العملية حيث نضيف الأقواس المقابلة مع مراعاة الشرط، فكل قوس يليه عدد نضع له القوس المقابل بعد خانتين، والقوس الذي يسبقه نضع له القوس المقابل بعد العدد التالي للعدين السابق ذكرهما، و منه نستنتج وجود تابع تقابل بين هاتين السلسلتين، وبعد القيام بالتقابل السابق نقوم بتحويل كل قوس إلى 1 وكل عدد إلى 0.[[5]](#footnote-5)*

***ملاحظة :*** *ليس بالضرورة أن تكون السلسلة من وحدات وأصفار بل أي سلسلة من عنصرين مكررين n مرة بحيث يكون عدد مرات ظهور الأول أكبر أو يساوي عدد مرات ظهور الثاني عند أي نقطة من السلسلة .*

**جدول(1) :** توضيح التقابل المستخدم لإثبات المسألة الثانية

2. **3 **المسألة الثالثة : (*non-crossing handshake* ) :**

 ***طلب المسألة :*** *ما هو**عدد الطرق التي يمكن ل 2n شخص جالسين على طاولة مستمرة مصافحة الأيدي بدون أن تتقاطع أيديهم؟؟.*

**الإثبات :** *لإثبات أن هو حل المسألة نوجد تقابل بين المسألة الثانية وهذه المسالة .*

*لتوليد سلسلة أصفار و واحدات نبدأ من نقطة ثابتة (الشخص ذاته) ونتجه باتجاه محدد (مع أو عكس عقارب الساعة) ونكتب 1 عندما نكون قد مررنا لأول مرة بأحد طرفي مصافحة، ونكتب 0 عند المرور الثاني ،نلاحظ أن العملية قابلة للعكس. ومنه يوجد تابع تقابل بين المسألتين السابقتين .[[6]](#footnote-6)*

*إثبات أن عكس العملية هو تابع (لكل سلسلة أصفار و واحدات يعطي مصافحة واحدة):*

**صورة (6) :** توضيح للتقابل المستخدم لإثبات المسألة الثالثة

***الموضوعة 7:*** *أثناء عملية العكس إذا كان هناك سلسلة واحدات طولها k وتلتها سلسلة أصفار من الطول ذاته، فالطريقة الوحيدة لوصلها هي بوصل الصفر الأولى بالواحد الأخير ثم الصفر الثانية بالواحد ما قبل الأخير وهكذا..*

*ا****لإثبات******:*** *إذا وصل أي منها بغير الطريقة السابقة فإن ذلك سيشكل منطقة معزولة (لأن المصافحات لا يجب أن تتقاطع) يكون في تلك المنطقة عدد الواحدات لا يساوي عدد الأصفار مما يعني عدم إمكانية إتمام المصافحات.*

*بالاعتماد على الموضوعة يمكننا القول أن الطريقة الوحيدة لتحويل سلسلة أصفار و واحدات إلى مصافحة على طاولة مستديرة تأتي وفق الخطوتين :*

1. *كلما أتت سلسلة من k 1 و تلتها سلسلة من m 0، إذا كان نربط آخر سلسلة من x 1 بأول سلسلة من m 0 وهكذا ..*

**1 1 1 0 0 1 1 0 0 0**

1. *عند الانتهاء من الخطوة (أ) نهمل الأشخاص الذين تم ربطهم بالمصافحات مع الواحدات والأصفار المقابلة لهم ونعيد الخطوة (أ)على ما تبقى .*

**صورة (7) :** توضيح لعكس للتقابل المستخدم لإثبات المسألة الثالثة

***ملاحظة******:*** *لا يمكن أن تتقاطع المصافحات الناتجة عن تكرار الخطوة (أ) لأنها في كل مرة تشكل مجموعة منعزلة*

**2. 4 المسألة الرابعة : ) *Lattice paths*) :**[[7]](#footnote-7)

***طلب المسألة :*** *لإثبات أن هو حل المسألة نوجد تقابل بين المسألة الثانية وهذه المسالة.*

 *في مستوي ديكارتي أوجد عدد طرق الانتقال من المبدأ إلى النقطة (n,n) بحيث من أجل أي نقطة (x,y) يمكن الانتقال إلى (x+1,y) أو (x,y+1) ، و لا يُقطًع القطر الواصل بين المبدأ و(n,n).*

**الإثبات :** *نرمز لكل انتقال من الشكل بـ E*

*ولكل انتقال من الشكل*  بـ *N*

فتكون المسألة مكافئة لتشكيل سلسلة من n *N* و n *E* بحيث يكون عدد مرات كتابة *E* أكبر أو يساوي عدد مرات كتابة *N* فتكون هذه المسألة مكافئة للمسألة الثالثة .

***طريقة أخرى :*** *عدد المسارات الانتقال من المبدأ إلى النقطة ذات الإحداثيات (n,n) دون شروط هو .*

 نعرف تابعاً منطلقه المسارات المخالفة للشرط ومستقره المسارات من المبدأ إلى النقطة *(n+1,n-1)* وهو تحويل كل *N* إلى *E* وكل *E إلى N* بعد النقلة التي تسببت في قطع المسار ونلاحظ بسهولة أن عكس التابع هو تابع أيضاً لذا هو يمثل تقابل .

فيكون عدد المسارات التي تربط المبدأ و *(n,n)* والقاطعة للقطر هو ذاته عدد المسارات للنقطة *(n+1,n-1)* وهو .

**صورة (8) :** توضيح للتقابل المستخدم لإثبات المسألة الرابعة

ومنه.

الباب الثاني : تقريبات أعداد كتلان :

الفصل الثالث :حدود وانغ ( ***Wang's bounds*** ) :

في عام 1990, قدم وانغ حدود للمرافقات التوفيقية المركزية، سنستخدمه كحد لأعداد كتلان .

**الإثبات :** نفرض المتراجحة تكافئ :

ومنه

بشكل مشابه :

ومنه بالدمج نحصل على المطلوب .[[8]](#footnote-8)

وبقسمة طرفي المتراجحة السابقة على نحصل على :

الفصل الرابع : تقريب ستيرلينغ ( ***Stirling's approximation*** ) :[[9]](#footnote-9)

سنقدم بدايةً مجموعة من الموضوعات التي سنعتمد عليها في استنتاج الصيغة.

**الموضوعة8 :** إذا كانت فإن :

**الإثبات :**

لأجل بحسب صيغة ماكلورين :

بأسلوب مشابه :

**الموضوعة9 :** أياً كانت

**الإثبات :**

بتطبيق الموضوعة8 على  *نحصل على :*

ومنه

**الموضوعة 10 :** ***product formula of Wallis*** ))

**الإثبات :**

باستخدام جداء أولر اللامنتهي لتابع الجيب

*نعوض لنحصل على*

*ومنه :*

و بضرب الطرفين ب2 وجذرهما ينتج المطلوب .

**صيغة ستيرلينغ :** أياً كانت

**الإثبات :**

نفرض و

فنلاحظ أن

بالاعتماد على الموضوعة 9

بالاستقراء الرياضي واعتماداً على العلاقة السابقة ينتج :

عندما

من الموضوعة 10 نجد أن :

بتعويض و بالمتراجحة السابقة نحصل على الصيغة.

**نتيجة الباب الثاني :**

بتطبيق تقريب ستيرلينغ على أعداد كتلان نجد أن :

بينما :

مما يجعل تقريب ستيرلينغ أكثر دقةً من حدود وانغ ويسمح باستخدامه لحساب عدد خانات بالقيم الكبيرة لـ .

الباب الثالث : العلاقة بين أعداد كتلان والاعداد الأولبة :

الفصل الخامس : أعداد كتلان ***mod 2*** .

**5. 1 زوجية أعداد كتلان :**

يكون عدداً فردياً إذا وفقط إذا كانت *n* من الشكل .[[10]](#footnote-10)

**الإثبات :**

ينتج من صيغة سغنر العودية أن :

إذا كان *n* فردياً

إذا كان *n* زوجياً

ومنه يكون فردياً إذا كان *n* ، وبالأسلوب ذاته إذا كان , بالمتابعة هكذا نجد أن فردي إذا وفقط إذا كان وبملاحظة أن أصغر عدد *k* يحقق أن فردي هو الصفر ينتج أن فردي يكافئ أن

**5. 2 أعداد كتلان الفردية mod 2k :**

أياً كانت الأعداد تأخد بواقي مختلفة عند قسمتها على والأعداد من الشكل تأخد باقي ثابت عند قسمتها على [[11]](#footnote-11).

**الموضوعة11 :** أياً كانت تتحقق العلاقات التالية :

**الإثبات :**

نثبت صحة العلاقة الأولى بالاستقراء الرياضي :

1. القضية صحيحة من أجل حيث .
2. نفرض صحة القضية من أجل .
3. نثبت صحة القضية من أجل .

نناقش حالتين :

* **أولاً :** ومنه ينتج أن .
* **ثانياً** : ومنه ينتج أن .

والعلاقة الثانية تنتج وضوحاً من الأولى .

**الموضوعة12 :** نعرف حيث هو أكبر عدد صحيح يحقق . إذا كان

**الإثبات :**

نثبت صحة العلاقة الأولى بالاستقراء الرياضي :

1. القضية صحيحة من أجل حيث .
2. نفرض صحة القضية من أجل .
3. نثبت صحة القضية من أجل .

 ولكن  *ومنه* *:*

أما العلاقة الثانية :

**الموضوعة13 :** إذا كان إذاً فإن .

**الإثبات :**

نفرض أن وتحقق بالإعتماد على الموضوعة 12 :

بناءً على الموضوعة 11 نقوم بأخد العلاقة السابقة لنحصل على :

وهذا تناقض منه تنتج صحة الموضوعة ومن الموضوعة نستنتج بسهولة الجزء الأول من الطلب.

**الموضوعة14 :** إذا كان إذاً فإن .

**الإثبات :**

نفرض أن وتحقق بالإعتماد على الموضوعة 12 :

بناءً على الموضوعة 11 نقوم بأخد العلاقة السابقة لنحصل على :

وهذا تناقض منه تنتج صحة الموضوعة ومن الموضوعة نستنتج بسهولة الجزء الأول من النظرية.

**الموضوعة15 :** إذا كانت فأياً كانت .

**الإثبات :**

من الموضوعة 12 هذا يكافئ :

لإثبات ذلك يكفي إثبات أن :

بالاعتماد على الموضوعة 11 تنتج صحة العلاقتين السابقتين من أجل .

بقي أن نثبت العلاقة من أجل

ستكون العلاقة صحيحة وضوحاً من أجل

من أجل من الموضوعة 11 نجد :

بتطبيق الموضوعة 12 على ما سبق نجد :

وبهذا يكتمل إثبات الجزء الثاني من النظرية .

الفصل السادس : القواسم الأولية لأعداد كتلان:

**6. 1 أولية أعداد كتلان :**

لا يوجد أعداد كتلان أولية سوى فقط [[12]](#footnote-12).

**الإثبات :**

نفرض وجود عدد طبيعي يحقق أن عدداً أولياً فيكون:

وبما أن ينتج أن ومن المساواة السابقة نجد أن ومنه :

وهذا غير محقق أياً كانت

**6. 2 أعداد كتلان التي لا تقبل القسمة على عدد أولي محدد : [[13]](#footnote-13)**

كتعميم لما ذكرناه سابقاً عن أعداد كتلان الفردية سنبرهن الآن على أنه من أجل كل عدد أولي فردي تتوضع أعداد كتلان التي تقبل القسمة عليه على شكل كتل طول كل منها و بدايات هذه الكتل

بحيث .

**الموضوعة 16 :** إذا اخترنا عدد بحيث و :

\

\

**الإثبات :**

1. *من العلاقة نحصل على* النتيجة *بوضوح .*
2. *بتطبيق العلاقة السابقة خمس مرات نحصل على النتيجة مباشرةً .*
3. *من العلاقة والإستفادة من النتيجة (أ) نحصل على* .

**الموضوعة 17 :** *إذا إخترنا عدد بحيث و*  :

\

**الإثبات :**

1. *من العلاقة نحصل على النتيجة كما في الموضوعة السابقة .*
2. *بتطبيق العلاقة السابقة عدة مرات .*
3. *من العلاقة و ملاحظة أن يقسم بسط الكسر السابق ولا يقسم مقامه يتم الإثبات*.

**الموضوعة 18 :** *من أجل عدد أولي فردي و أعداد صحيحة تحقق :*

*فإن :*

1. *إذا كان*
2. *إذا كان*

**الإثبات :**

*من العلاقة :*

* *من أجل بوضوح نجد أن و أن نجد أنه من أجل الحالة (أ)*

 *(البسط والمقام في الكسر السابق لا يقبلان القسمة على )أما في الحالة (ب) (البسط يقبل القسمة على أما المقام فلا) .*

* *من أجل نلاحظ أن كل من هو جداء لأعداد تأخد جميع بواقي القسمة المختلفة على مرةً لذا نناقش حالتان وبملاحظة أن :*
1. *إما تظهر في البسط ومنه وهذا يؤدي إلى*

*وهنا تكون .*

1. *أو لا تظهر في البسط ومنه وهذا يؤدي إلى*

*وعدم ظهور يكفئ .*

**الموضوعة 19:**

**الإثبات : بالاستقراء الرياضي نجد :**

1.
2. *نفرض صحة القضية من أجل .*
3. *بتطبيق الموضوعة 18 على و نجد :*

**الموضوعة20 :** *إذا كان عدداً أولياً فردياً و عدداً طبيعياً (إذا كان تكون ) إذا أياً كانت يوجد كتلة لا تقبل القسمة على ضمن المجال وهذا يكافئ وجود العدد ذاته من الكتل التي تقبل القسمة على ضمن ذلك المجال لأن بداية المجال هي كتلة لا تقبل القسمة على ونهايته كتلة تقبل القسمة على .*

**الإثبات :**

*من الموضوعة السابقة يكفي مناقشة الحالة حيث بالاستقراء الرياضي نجد :*

1. *من الموضوعة السابقة نجد بوضوح أن القضية صحيحة من أجل و بالتعويض نجد أنها صحيحة من أجل و .*
2. *نفرض وجود كتلة ضمن المجال و كتلة ضمن المجال .*
3. *نثبت وجود كتلة ضمن المجال .*
* *من الموضوعة السابقة نجد أن عدد الكتل ضمن المجال هو لأن جميع عناصر هذا المجال تقبل القسمة على .*
* *من الموضوعة السابقة نجد أن عدد الكتل ضمن المجال هو ذاته عدد الكتل في المجال لأن جميع عناصر المجال تقبل القسمة على .*
* *أيضاً بحسب الموضوعة السابقة أن عدد الكتل ضمن المجال هو ذاته عدد الكتل ضمن المجال ومن الفرض الاستقرائي والنتيجة السابقة نجد أن عدد الكتل هو .*
* *من النتائج السابقة نجد أن عدد ضمن المجال هو مجموع عدد الكتل في المجالات وهو*

 *ومنه تنتج صحة القضية .*

**الموضوعة21 :** *إذا كان هو طول الكتلة رقم من أعداد كتلان التي تقبل القسمة على وكان يحقق:*

 *فإن :*

**الإثبات :**

*بفرض*

***أولاً***: *إذا كان فبحسب الموضوعة 20 نجد أن هذا هو عدد الكتل ضمن المجال وبحسب الموضوعتين( 19,18) نعلم أن آخر كتلة ضمن المجال السابق تقبل القسمة على أعداد كتلان تبدأ بـ*

 *و تنتهي عند ومنه .*

***ثانياً*** *:* نثبت بالإستقراء الرياضي أنه إذا كانت (هذا هو تمثيل k بنظام عد أساسه )فإن هذا هو عدد الكتل ضمن المجال وأن طول آخر كتلة فيه من الكتل التي تقبل القسمة على أعداد كتلان هو

1. *من أجل القضية صحيحة بحسب الجزء الأول من الإثبات .*
2. *نفرض صحة القضية من أجل .*
3. *بتطبيق الموضوعة 18 على نجد أن عدد الكتل ضمن المجال هو عدد الكتل ضمن المجال مضافاً إليه عدد الكتل ضمن المجال أي وأيضاً نجد أن آخر كتلة ضمن هذا المجال يساوي طولها آخر كتلة ضمن المجال وهو*

**ملاحظة :** *أثناء إثبات الموضوعة السابقة لاحظنا أن الكتلة رقم كانت هي آخر كتلة ضمن المجال فإن نهاية الكتلة يجب أن تكون وبما أن طولها تكون بدايتها*

**ملاحظة :** *ما تم ذكره عن بداية الكتل ونهايتها (خارج نص النظرية) يجب أن يطرح منه 1 ليكون متطابقاً مع تعريفنا الأول لأعداد كتلان .*

خاتمة البحث ...

 تضمنت حلقة البحث ثلاث أبواب يمثل كل منها إجابة على أحد التساؤلات المطروحة في البداية ... حيث أثبتنا في **الباب الأول** وجود تقابلات بين اشهر المسائل التي تظهر أعداد كتلان كحل لها ومنه يمكن أن نستنتج أن هذه المسائل هي مسائل متكافئة (المسألة ذاتها لكن تظهر بشكل مختلف).. أما في **الباب الثاني** فقد انطلقنا من صيغتين شهيرتين لأعداد كتلان (كنا قد تناولنا إثباتهما في الباب الأول) وصولاً لتقريبين مختلفين لأعداد كتلان وبيننا فعالية أحدهما بحساب عدد خانات عدد كتلان ... في حين أثبتنا في **الباب الثالث** توضع أعداد كتلان التي تقبل القسمة على عدد أولي بشكل كتل مما يسهل عملية التحقق من قابلية القسمة على عدد أولي إضافةً إلى خواص أخرى .

|  |
| --- |
| فهرس الصور |
| الرقم | **اسم الصورة** | **رقم الصفحة** |
| 1 | توضيح لإثبات صيغة سغنر العودية | 3 |
| 2 | توضيح لإثبات الموضوعة 1 | 4 |
| 3 | توضيح للمجموعة الأولى في التقابل المستخدم بالموضوعة 5 | 5 |
| 4 | توضيح للمجموعة الثانية في التقابل المستخدم بالموضوعة 5 | 5 |
| 5 | توضيح التقابل المستخدم لإثبات المسألة الأولى | 6 |
| 6 | توضيح للتقابل المستخدم لإثبات المسألة الثالثة | 7 |
| 7 | توضيح لعكس للتقابل المستخدم لإثبات المسألة الثالثة | 8 |
| 8 | توضيح للتقابل المستخدم لإثبات المسألة الرابعة | 8 |
|  |  |  |

|  |
| --- |
| فهرس الجداول |
| الرقم | **اسم الجدول** | **رقم الصفحة** |
| 1 | توضيح التقابل المستخدم لإثبات المسألة الثانية | 7 |
|  |  |  |

المصادر والمراجع :

1. **Thomas koshy (2009) :** *Catalan numbers with applications* \_Oxford university press .
2. **Richard P. Stanley (2015) :** *Catalan numbers* \_ Cambridge university press .
3. <http://www.renyi.hu/~dezso/coa/catalan_number.doc> .
4. **Ralph P. Grimaldi (2012) :** *Fibonacci and Catalan numbers an introduction* John Wiley &sons, Inc .
5. <http://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/MathMisc/Stirling.pdf> .
6. **Thomas Koshy and Mohammad Salmassi :** *Parity and primality of catalan numbers*\_framingham state college, Framingham,MA 01701 .
7. **Hsueh\_Yung Lin (2010) :** *The odd catalan numbers modulo 2^k* \_Centre de mathematique Laurent shwarz .
8. **Ronal Alter and K. K. Kubota(1971) :** *Prime and prime power divisibility of catalan numbers*\_University of Kentucky .

**ملاحظة** : تم الدخول عدة مرات إلى المواقع المرتبطة بقائمة المصادر والمراجع المشار إليها أعلاه، وكانت آخر مرة يوم مساء يوم السبت 2/1/2016 الساعة التاسعة.

1. **.Thomas koshy (2009) :** *Catalan numbers with applications* \_Oxford university press p.(114,116). [↑](#footnote-ref-1)
2. **. Richard P. Stanley (2015) :** *Catalan numbers* \_ Cambridge university press p.(3,4,5). [↑](#footnote-ref-2)
3. **.** [**http://www.renyi.hu/~dezso/coa/catalan\_number.doc**](http://www.renyi.hu/~dezso/coa/catalan_number.doc) p.(6). [↑](#footnote-ref-3)
4. **.Thomas Koshy (2009) :** *Catalan numbers with applications* \_Oxford university press p.(135,136).

 [↑](#footnote-ref-4)
5. **.Ralph P. Grimaldi (2012) :** *Fibonacci and Catalan numbers an introduction* John Wiley &sons, Inc p.(160,161). [↑](#footnote-ref-5)
6. **6 .Thomas koshy (2009) :** *Catalan numbers with applications*\_Oxford university press p.(160,164). [↑](#footnote-ref-6)
7. **.Thomas koshy (2009) :** *Catalan numbers with applications* \_Oxford university press p.(260,261,262). [↑](#footnote-ref-7)
8. **.Thomas Koshy (2009) :** *Catalan numbers with applications* \_Oxford university press p.(46,47). [↑](#footnote-ref-8)
9. **.** [**http://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/MathMisc/Stirling.pdf**](http://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/MathMisc/Stirling.pdf) p. (1,2,3,4 ). [↑](#footnote-ref-9)
10. **.** **Thomas Koshy and Mohammad Salmassi :** *Parity and primality of catalan numbers*\_framingham state college, Framingham,MA 01701 p.(53) . [↑](#footnote-ref-10)
11. **.**  **Hsueh\_Yung Lin (2010) :** *The odd catalan numbers modulo 2^k* \_Centre de mathematique Laurent shwarz p.(2,3,4). [↑](#footnote-ref-11)
12. **.** **Thomas Koshy and Mohammad Salmassi :** *Parity and primality of catalan numbers*\_framingham state college, Framingham,MA 01701 p.(53). [↑](#footnote-ref-12)
13. **.** **Ronal Alter and K. K. Kubota(1971) :** *Prime and prime power divisibility of catalan numbers*\_University of Kentucky p.(246,247,248,249,250,251). [↑](#footnote-ref-13)