الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية
المركز الوطني للمتميزين

الإحداثيات المساحية

حلقة بحث مقدمة لمادة الرياضيات

تقدمة الطالب : خالد اسماعيل

إشراف المدرس : حبيب عيسى

1.1 المقدمة

بدأت الهندسة الإقليدية مع العالم اليوناني إقليدس, و هي تعد بذلك أحد أقدم فروع الرياضيات. تلعب الهندسة الإقليدية دوراً هاماً في الفيزياء, لكن لعل أكثر ما يميزها هو مسائلها, فحلها يحتاج مزيجاً جميلاً من الذكاء و الخبرة و الصبر, إلى جانب طبيعتها التجريدية, و هذا ما جعلها مثالية لمسابقات الرياضيات. في كل عام من الأولومبياد العالمي للرياضيات, ترد مسألة أو مسألتا هندسة إقليدية من أصل ستة مسائل, إلى جانب العديد من الأولومبيادات الإقليمية مثل أولومبياد أسيا و المحيط الهادي, أولومبياد البلقان ... . و هنا بدأت بعض الاستراتيجيات للالتفاف حول هذه المسائل و تحويلها من طبيعتها الشكلية إلى علاقات رياضية بهدف تسهيل حلها. فلجأ البعض إلى الإسقاط على محورين متعامدين و استخدام الإحداثيات الديكارتية , لكن سرعان ما أثبتت هذه الطريقة فشلها , و هذا بسبب صعوبة المعادلات المعبرة عن الدوائر فيها . حالياً , أشهر هذه الطرق هي الأعداد العقدية , لكن لا تزال هناك العديد من الثغرات فيها , خاصة فيما يتعلق بالمثلثات , فالتعامل مع صيغة بعض النقاط الأساسية فيها صعب .

الحاجة أم الاختراع , و انطلاقاً من الحاجة للحصول على صيغ سهلة للنقاط و المستقيمات الأساسية في المثلث , ظهر نظام الإحداثيات المساحية , الذي سنناقشه في هذا البحث .

أولاً , سنورد أساسيات هذا النظام و كيفية استنتاجة , و بعدها سنورد بعض الأمثلة لنوضح كيف يمكن استخدامه لحل المسائل المتعلقة بمثلث .

1.2 مصطلحات

$\vec{P}$: شعاع التوجيه $\overrightarrow{OP}$.

$\alpha \;,\; \beta \;,\; \gamma$: قياسات الزوايا $\angle CAB \;,\; \angle ABC \;,\; \angle BCA$ على الترتيب .

$a \;,\; b \;,\; c$: أطوال الأضلاع $\overline{BC} \;,\; \overline{CA} \;,\; \overline{AB}$ على الترتيب .

$[ABC]$: مساحة المثلث ABC .

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$: محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

G : نقطة تلاقي المتوسطات , أي مركز ثقل المثلث . ($Centroid$) .

H : نقطة تلاقي الارتفاعات . ($Orthocenter$) .

I : نقطة تلاقي المنصفات , أي مركز الدائرة المماسة داخلاً . ($Incenter$) .

O : نقطة تلاقي المحاور , أي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ($Circumcenter$) .

R : نصف قطر الدارة المارة برؤوس المثلث .

r : نصف قطر الدائرة المماسة داخلاً .

$\sum_{cyc} x_1x_2$: هو المجموع $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$.

1.3 إحداثيات مستقيم :

سنبدأ أولاً بمراجعة بعض بعض الأفكار عن النقاط على مستقيم معطى. إذا كانت P و Q نقطتين على مستقيم L , عندئذ تعطى معادلة المستقيم L الحامل للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ باستخدام أشعة التوجيه بالشكل الآتي :

$$\vec{R}=\vec{P}+t(\vec{Q}-\vec{P})=(1-t)\vec{P}+t\vec{Q}$$

هنا لدينا t عدد حقيقي بحيث $-\infty<t<\infty$ و تعتمد قيمته على مكان النقطة R على المستقيم L . على سبيل المثال إذا كان $t=0$ فتكون النقطة R عندئذ منطبقة على النقطة P , و إذا كان $t=1$ عندئذ النقطة R منطبقة على النقطة Q . مجموعة النقاط R التي تحقق $0<t<1$ تقع على القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$, و النقاط التي تحقق $t<0$ تقع على امتداد $\overline{QP}$ من جهة P. و النقاط التي تحقق $t>1$ تقع على امتداد $\overline{PQ}$ من جهة Q. إذا وضعنا $t=\dfrac{m}{l+m}$ عندئذ تصبح معادلة الستقيم L كالتالي :

$$(l+m)\vec{R}=l\vec{P}+m\vec{Q}$$

على سبيل المثال, عندما $l=1$ و $m=2$, سيكون لدينا $\vec{R}=\frac{1}{3}(\vec{P}+2\vec{Q})$ و النقطة R تقع على القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ بحيث $\overline{PR}=2\overline{RQ}$. عندما $l=1$ و $m=0$ تكون النقطة R طبوقة على النقطة P , و كذلك عندما $l=0$ و $m=1$ تكون النقطة ق طبوقة على النقطة Q .

من الآن فصاعداً سيكون دائماً $l+m=1$ و تكون معادلة المستقيم L :

$$\vec{R}=l\vec{P}+m\vec{Q}$$

بإمكاننا الآن القول أن كل نقطة R تقع على المستقيم L الحامل للقطعة $\overline{PQ}$ تقابل الثنائية (l,m) المحققة للشرط $l+m=1$. حيث $(1,0)$ تقابل النقطة P و $(0,1)$ تقابل النقطة Q و نقطة كالنقطة $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ كما في المثال السابق تقابل نقطة R بحيث يكون $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}=2$. و بشكل أعم , إذا كان $l>0$ و $m>0$, فتكون النقطة R واقعة على القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ بحيث $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}=\dfrac{m}{l}$. النقاط الواقعة على امتداد $\overline{PQ}$ من جهة Q تقابل

الثنائية (l,m) بحيث $l<0$ و $m>1$. إذا أعطينا للأطوال الهندسية إشارة بحيث تكون الأطوال من جهة P إلى Q ذات إشارة موجبة , و الأطوال من جهة Q إلى P ذات إشارة سالبة , فإن العلاقة $\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}=\frac{m}{l}$ تبقى محققة , في حالة النقاط الواقعة على امتداد $\overline{PQ}$ من جهة Q و بالعكس. على سبيل المثال , عندما تكون النقطة $R=(2,-1)$ يكون $\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}=-\frac{1}{2}$, $\overline{PR}$ ذات إشارة سالبة و $\overline{RQ}$ ذات إشارة موجبة . نقول عن النقطة $R=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ أنها تقسم $\overline{PQ}$ داخلياً بنسبة $1:2$ في حين نقول عن النقطة $R=(2,-1)$ أنها تقسم $\overline{PQ}$ خارجياً بنسبة $1:2$.

نظرية 1.1 : تكون ثلاث نقاط P , Q و R على استقامة واحدة إذا و فقط إذا وجدت ثلاث ثوابت k , l و m بحيث يكون $k\vec{R}+l\vec{P}+m\vec{Q}=0$ و $k+l+m=0$.

من السهل التأكد من صحة النظرية السابقة, يمكننا ببساطة من المعادلة $\vec{R}=l\vec{P}+m\vec{Q}$ أن نأخذ $k=-1$ و مباشرة نحصل على المعادلة أعلاه .

نظرية 1.2 : نظام الإحداثيات (l,m) للمستقيم L المعطى بالمعادلة $\vec{R}=l\vec{P}+m\vec{Q}$ غير مرتبط بالمبدأ O .

برهان : لنفرض أنه لدينا مبدأ آخر O' . فيكون لدينا $\vec{P}=\overrightarrow{OO'}+\vec{P'}$ و $\vec{Q}=\overrightarrow{OO'}+\vec{Q'}$ و $\vec{R}=\overrightarrow{OO'}+\vec{R'}$, نعوض في المعادلة الأساسية :

$$\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{R'}=l(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{P'})+m(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{Q'})$$

لكن لدينا $l+m=1$, فتصبح المعادلة السابقة كالتالي :

$$\overrightarrow{R'}=l\overrightarrow{P'}+m\overrightarrow{Q'}$$

سنقوم الآن بتقديم طريقة لحساب الأطوال في نظامنا هذا . قد تبدو هذه الطريقة معقدة و صعبة في البداية , لكن هذه هي الطريقة الصحيحة للانتقال فيما بعد إلى الأبعاد الأعلى.

ليكن $|PQ|=c$, و لتكن النقطتان $R=(l,m)$ و $S=(r,s)$ تقعان على المستقيم L الحامل للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ حيث $l+m=1$ و $r+s=1$. فيكون لدينا $\overrightarrow{RS}=\vec{S}-\vec{R}=(u,v)$ حيث $u=r-l$ و $v=s-m$, نلاحظ أن $u+v=0$. الآن , بما أنه $\overrightarrow{PQ}=(-1,1)$ و لدينا من التعريف $|PQ|=c$ فيكون :

$$\overrightarrow{RS}=(u,v)=(-v,v)=v(-1,1)=v\overrightarrow{PQ}$$

و منه نجد أن :

$$\overrightarrow{RS}^2=-c^2uv$$

1.4 التمثيل الشعاعي للمثلثات :

ليكن ABC مثلثاً في المستوى Π و لتكن O مبدأ اختيارياً في الفضاء . سنورد , بدون برهان , أن المساحة ذات الإشارة للمثلث ABC تعطى بالعلاقة :

$$[ABC]\cdot k=\frac{1}{2}(\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{C}+\vec{C}\vec{A})$$

حيث k شعاع وحدة متعامد مع المستوي Π . و اتجاه k يدل على إشارة $[ABC]$. هذا يمكننا من تمييز إشارة المساحات في المستوى Π . فإذا كان $[ABC]$ موجباً و النقط P و A تقعان بنفس الجهة بالنسبة للضلع AB فيكون $[PBC]$ مقداراً موجباً , أما إذا كانت في جهتين مختلفتين فيكون المقدار $[PBC]$ سالباً.

لنفرض الآن أن المبدأ O يقع خارج المستوي Π . نعلم الآن أن الأشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$ و $\vec{C}$ غير مرتبطة خطياً , و أن $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\neq 0$ و لدينا $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$ حيث ليس أياً من الأشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$ و $\vec{C}$ هو الشعاع الصفري شرط لازم و كافي لتكون النقطة A واقعة في مستوي المثلث OBC .

نظرية 1.3 : إذا كان المبدأ O يقع خارج المستوي Π الذي يحوي المثلث ABC , عندئذ أياً تكون النقطة $P\in\Pi$, توجد ثلاثية مميزة (l,m,n) بحيث يعطى شعاع التوجيه $\overrightarrow{OP}$ بالعلاقة :

$$\vec{P}=l\vec{A}+m\vec{B}+n\vec{C} \quad \text{و} \quad l+m+n=1$$

برهان : لدينا $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}$. أي :

$$\vec{P}=\vec{A}+\alpha(\vec{B}-\vec{A})+\beta(\vec{C}-\vec{A})$$

$$\vec{P}=(1-\alpha-\beta)\vec{A}+\alpha\vec{B}+\beta\vec{C}$$

و إذا اخترنا $l=1-\alpha-\beta$, $m=\alpha$, $n=\beta$ نحصل على المعادلة المنشودة. لبرهان وحدانية هذه الثلاثة , سنعتمد على كون $\vec{A}$, $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ثلاث أشعة غير مرتبطة خطياً . نفرض جدلاً أن $\vec{P}=l'\vec{A}+m'\vec{B}+n'\vec{C}$ حيث $l'+m'+n'=1$ و $(l',m',n')\neq(l,m,n)$ عندئذ يكون $(l-l')\vec{A}+(m-m')\vec{B}+(n-n')\vec{C}=0$ و ليس أيا من $l-l'$ و $m-m'$ و $n-n'$ يساوي الصفر . لكن هذا يناقض كون الأشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$ و $\vec{C}$ غير مرتبطة خطياً.

لكننا لم نصل إلى هدفنا بعد , فنحن لا نريد أن نحدد موقع المبدأ O ليكون خارج المستوي Π , الشيء الجميل هنا , أننا لسنا بحاجة لذلك.

نظرية 1.4 : حتى إذا كان المبدأ O يقع في المستوي Π . عندئذ أياً تكون النقطة $P\in\Pi$, توجد ثلاثية مميزة (l,m,n) بحيث يعطى شعاع التوجيه $\overrightarrow{OP}$ بالعلاقة :

$$\vec{P}=l\vec{A}+m\vec{B}+n\vec{C} \quad \text{و} \quad l+m+n=1$$

برهان : بما أن المبدأ O يقع في المستوي Π , نستنتج أن الأشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$ و $\vec{C}$ الآن مرتبطة خطياً . أي أنه يوجد ثلاث ثوابت حقيقية ليست كلها أصفاراً r , s و t بحيث $r\vec{A}+s\vec{B}+t\vec{C}=0$. بما أن A ,B و C ليست على استقامة واحدة , لدينا وفق **النظرية 1.1** $r+s+t=d\neq 0$. الآن , ليكن $\vec{P}=l_0\vec{A}+m_0\vec{B}+n_0\vec{C}$ حيث $l_0+m_0+n_0=c$, و لنعرف k بحيث $c-kd=1$. عندئذ :

$$\vec{P}=l_0\vec{A}+m_0\vec{B}+n_0\vec{C}-k(r\vec{A}+s\vec{B}+t\vec{C})=l\vec{A}+m\vec{B}+n\vec{C}$$

حيث $l+m+n=l_0+m_0+n_0-k(r+s+t)=c-kd=1$. الآن لنبرهن وحدانية الثلاثية (l,m,n) , لنفرض جدلاً أنه يوجد ثلاثية أخرى (l',m',n') بحيث تحقق $\vec{P}=l'\vec{A}+m'\vec{B}+n'\vec{C}$ و $l'+m'+n'=1$ و $(l,m,n)\neq(l',m',n')$. لندعو $u=l-l'$, $v=m-m'$ و $w=n-n'$ فيكون لدينا :

$$u\vec{A}+v\vec{B}+w\vec{C}=0$$

لكن هذا يعني وفق **النظرية 1.1** أن النقاط A , B و C تقع على استقامة واحدة , تناقض , إذن نستنتج أن الثلاثية (l,m,n) وحيدة .

نظرية 1.5 : نظام الإحداثيات (l,m,n) في المستوي Π المعرف بالعلاقات :

$$\vec{P}=l\vec{A}+m\vec{B}+n\vec{C} \quad \text{و} \quad l+m+n=1$$

غير مرتبط بالمبدأ O .

برهان هذه النظرية شبيه بالطريقة التي برهنا فيها النظرية 1.2 عدا عن المسقط الثالث .

1.5 لماذا يدعى نظام الإحداثيات (l,m,n) بالإحداثيات المساحية ؟

يدعى نظام الإحداثيات (l,m,n) المعطى بالعلاقات المذكورة بنظام الإحداثيات المساحية لأسباب سنوردها فيما بعد . أولاً , نلاحظ أن الثلاثية $(1,0,0)$ تمثل النقطة A و فيها يكون $\vec{P}=\vec{A}$. و الثلاثية $(0,1,0)$ تمثل النقطة B و فيها يكون $\vec{P}=\vec{B}$. و الثلاثية $(0,0,1)$ تمثل النقطة C و فيها يكون $\vec{P}=\vec{C}$. لذا غالباً ما ندعو المثلث ABC بمثلث المرجع .

الآن , لنذكر الصيغة المعبرة عن المساحة ذات الإشارة للمثلث ABC التي تنص على أن :

$$[ABC]k=\frac{1}{2}(\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{C}+\vec{C}\vec{A})$$

الآن , لنحسب $[PBC]$ حيث $\vec{P}=l\vec{A}+m\vec{B}+n\vec{C}$ فيكون :

$$[PBC]\cdot k=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BP})$$

$$[PBC]\cdot k=\frac{1}{2}(\vec{C}-\vec{B})(\vec{P}-\vec{B})$$

$$[PBC]\cdot k=\frac{1}{2}(\vec{C}-\vec{B})(l\vec{A}+(m-1)\vec{B}+n\vec{C})$$

$$[PBC]\cdot k=\frac{1}{2}l(\vec{A}\vec{B}+\vec{B}\vec{C}+\vec{C}\vec{A})$$

$$[PBC]\cdot k=l[ABC]k$$

$$\Rightarrow l=\frac{[PBC]}{[ABC]}$$

و بشكل مشابه نحصل على :

$$m=\frac{[APC]}{[ABC]} \quad \text{و أيضاً} \quad n=\frac{[ABP]}{[ABC]}$$

هنا طبعاً نحن نعتمد المساحات ذات الإشارة . و تقول هذه النتيجة أن أيا تكن النقطة P في المستوي Π , فإن $[PBC]+[APC]+[ABP]=[ABC]$, و هذا التعبير الهندسي عن $l+m+n=1$. و لهذا ندعو نظام الإحداثيات هذا بنظام الإحداثيات المساحية . لأن كل مسقط لها يعبر عن قيمة مساحة هندسية .

1.6 المساحات في الإحداثيات المساحية :

نظرية 1.6 : ليكن لدينا النقاط $P=(l_P,m_P,n_P)$, $Q=(l_Q,m_Q,n_Q)$ و $R=(l_R,m_R,n_R)$, عندئذ يكون لدينا :

$$\frac{[PQR]}{[ABC]}=\det\begin{pmatrix} l_P & m_P & n_P \\ l_Q & m_Q & n_Q \\ l_R & m_R & n_R \end{pmatrix}$$

برهان :

لنأخذ مبدأ الإحداثيات O خارج المستوي Π المحتوي للمثلث ABC , و لنرمز ب ρ_{ABC} بمجسم متوازي الأضلاع المحدد بالأشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$ و $\vec{C}$. و الأمر سيان بالنسبة للرمز ρ_{PQR}. عندئذ يكون لدينا من تعريف محدد المصفوفة باستخدام الحجوم العلاقة الآتية :

$$\frac{vol(\rho_{PRQ})}{vol(\rho_{ABC})} = \det\begin{pmatrix} l_P & m_P & n_P \\ l_Q & m_Q & n_Q \\ l_R & m_R & n_R \end{pmatrix}$$

و لكن لدينا أيضاً من صيغة حساب حجم مجسم متوازي الأضلاع :

$$vol(\rho_{PRQ}) = 6vol(OPRQ) = 2[PRQ]\cdot h$$

و بشكل مشابه نحصل على :

$$vol(\rho_{ABC}) = 6vol(OABC) = 2[ABC]\cdot h$$

بقسمة العلاقتين السابقات نحصل على :

$$\frac{vol(\rho_{PRQ})}{vol(\rho_{ABC})} = \frac{2[PRQ]\cdot h}{2[ABC]\cdot h} = \det\begin{pmatrix} l_P & m_P & n_P \\ l_Q & m_Q & n_Q \\ l_R & m_R & n_R \end{pmatrix}$$

و هو المطلوب .

1.7 المستقيمات في الإحداثيات المساحية :

نظرية 1.7 : لتكن لدينا النقطتان $P = (l_P, m_P, n_P)$ و $Q = (l_Q, m_Q, n_Q)$, فتعطى معادلة المستقيم المار من النقطتين بالعلاقة :

$$\det\begin{pmatrix} l_P & m_P & n_P \\ l_Q & m_Q & n_Q \\ l & m & n \end{pmatrix}=0$$

برهان : بكل بساطة , لننظر إلى العلاقة السابقة من وجهة نظر أنها تحدد جميع النقط R التي من أجلها تكون النقط P , Q و R على استقامة واحدة , إذا يكون $[PQR]=0$ و بالاعتماد على صيغة المساحة نحصل على العلاقة السابقة .

أي أن معادلة المستقيم في الإحداثيات المساحية من الشكل :

$ul+vm+wn=0$ حيث u , v و w أعداد حقيقية .

الأعداد u , v و w مميزة حتى الضرب بثابت .

إذا أردنا أن نحصل على معادلة مستقيم مار من النقطة A , ببساطة نعوض في المعادلة إحداثيات النقطة $A=(1,0,0)$, فنحصل على :

$$u(1)+v(0)+w(0)=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow vm+wn=0$$

فتكون معادلة المستقيم من الشكل :

$$m=kn : k\in\mathbb{R}$$

و إذا أردنا أن نحصل على معادلة المستقيم الحامل للضلع $\overline{BC}$ فنقوم ببساطة بتعويض الإحداثيات $B=(0,1,0)$ في معادلة المستقيم لنحصل على :

$$l=kn : k\in\mathbb{R}$$

هنا نكون قد استنتجنا معادلة المستقيمات المارة من النقطة B , و لكن نحن نريد أن نحدد هذا المستقيم ليمر من النقطة C , فنعوض إحداثيات النقطة $C=(0,0,1)$ في المعادلة السابقة فنحصل على :

$$l=0$$

و يمكننا النظر إلى النتيجة السابقة من وجهة نظر أخرى . بما أن l يعبر عن مساحة المثلث PBC و فرضاً لدينا P , B و C تقع على استقامة واحدة فنجد أن دائماً لدينا $l=0$.

على الرغم من أننا لا زلنا نجهل الكثير عن الإحداثيات المساحية , كمعادلة الدائرة , النقاط المميزة في المثلث ... إلا أنه بإمكاننا بالاعتماد على معلوماتنا الحالية برهان كل من نظريتي تشيفا و مينالاوس .

نظرية 1.7 : نظرية تشيفا : لتكن S نقطة داخل المثلث ABC . نمدد AS , BS و CS ليقطع BC , CA و AB في النقط D , E و F على الترتيب . هذا يكافئ :

$$\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB}=1$$

برهان : لنحصل عبى معادلة المستقيم الحامل للقطعة $\overline{AD}$, نعوض إحداثيات النقطة E في معادلة المستقيمات المارة من النقطة A , و هي : $m=kn$, نعوض $A=(0,1-p,p)$ لنحصل على :

$$n=\frac{1-p}{p}m$$

و بشكل مشابه نحصل على معادلات المستقيمات الحاملة للأضلاع $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$, لكن مع تعويض $B=(1-q,0,q)$ و $C=(s,1-s,0)$ فنحص على المعادلات :

$$l=\frac{1-s}{s}n \quad \text{و} \quad m=\frac{1-q}{q}l$$

و بضرب العلاقات السابقة ببعضها , نجد أن المعادلة تقبل حلاً إذا م فقط إذا كان :

$$\frac{(1-d)(1-e)(1-f)}{def}=1$$

و هذا بدوره يكافئ نظرية تشيفا .

لكن لا تزال صيغة المستقيمات غير مكتملة لدينا . الصيغ السابقة مفيدة جداً و كما رأينا هي كافية لبرهان مبرهنتي تشيفا و مينالاوس , لكنها محددة بالمستقيمات المارة برؤوس المثلث ABC و الحاملة لأضلاعه , و كما نعلم في الكثير من الحالات ليس هذا نحتاجه , فماذا نفعل ؟ ما هي صيغة المستقيمات العاملة في الإحداثيات المساحية :

1.8 بعض النقط الأساسية في المثلث :

سنتابع في تطبيقات الإحداثيات المساحية في المثلثات . من أحد حسنات الإحداثيات المساحية أنها تعطينا وصفاً بسيطاً لعدد من النقاط الأساسية في المثلثات , على عكس الإحداثيات الديكارتية و الهندسة العقدية . سنتعرف الآن على مفهوم جديد هو الإحداثيات الضبوطة و يرمز لها ب $(l:m:n)$ و تعني أن $\frac{[PBC]}{[PCA]}=\frac{l}{m}$ و $\frac{[PAC]}{[PBA]}=\frac{m}{n}$ و $\frac{[PBA]}{[PBC]}=\frac{n}{l}$ أي أننا لم نعد نحدد الإحداثيات ليكون مجموعها 1 .

النقطة I : نعلم ان $[IBC]=\frac{1}{2}ar$. و بنفس الطريقة نجد أن :

$$I=\frac{1}{rs}(\frac{1}{2}ar,\frac{1}{2}br,\frac{1}{2}cr)=\frac{1}{2s}(a,b,c)$$

$$I=(a:b:c)$$

النقطة H **:** لتكن A' , B' و C' هي أقدام الارتفاعات من A , B و C , و لتكن α , β و γ هي الزوايا A , B و C . نلاحظ أن : $\angle BHA'=\gamma$ إذن :

$$[PBC]=\frac{1}{2}aHA'=\frac{1}{2}aBA'\tan\gamma=\frac{1}{2}ac\cos\beta\tan\gamma$$

$$=\frac{c}{2\sin\lambda}a\cos\beta\cos\lambda=Ra\cos\beta\cos\gamma$$

و نحصل على الإحداثيات :

$$H=\frac{R}{sr}(a\cos\beta\cos\gamma,b\cos\alpha\cos\gamma,c\cos\alpha\cos\beta)$$

$$H=(a\cos\alpha\cos\beta : b\cos\alpha\cos\gamma : c\cos\beta\cos\gamma)$$

النقطة O : في المثلث OBC لدينا :

$$[OBC]=\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha = R^2\sin\alpha\cos\alpha$$

بالاعتماد على العلاقة : $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$:

$$[OBC]=\frac{1}{2}Ra\cos\alpha$$

إذن نحصل على الإحداثيات للنقطة بالشكل :

$$O=\frac{R}{2sr}(a\cos\alpha, b\cos\beta, c\cos\gamma)$$

$$O=(a\cos\alpha : b\cos\beta : c\cos\gamma)$$

1.9 مثال : مستقيم أولر :

تقع النقاط O , G و H على استقامة واحدة و هو ما يدعى بمستقيم أولر . يتحقق في مسـتقيم أولـر العلاقـة $OH=3OG$. لبرهان هذه الخواص فنحن بحاجة لإحداثيات النقط O , G و H . و هي كالتالي :

$$G=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

$$H=\frac{R}{sr}(a\cos\alpha\cos\beta, b\cos\alpha\cos\gamma, c\cos\beta\cos\gamma)$$

$$O=\frac{R}{2sr}(a\cos\alpha, b\cos\beta, c\cos\gamma)$$

نحن الآن ببساطة بحاجة أن نثبت أن :

$$3\vec{G}=2\vec{O}+\vec{H}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \vec{A} = \sum_{cyc} (Ra\cos\alpha + Ra\cos\beta\cos\gamma)\vec{A}$$

نلاحظ أن :

$$Ra(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma) = Ra(\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\sin\gamma)$$

$$= Ra(\sin\beta\sin\gamma) = \frac{abc}{4srR} = 1$$

و هو المطلوب.

1.10 مثال : المثلث OIH :

تقول المبرهنة أن :

$$\left[OIH\right] = \frac{1}{8r}(a-b)(b-c)(c-a)$$

البرهان : لدينا :

$$\left[OIH\right] = \left[ABC\right] \cdot \frac{R}{2sr} \cdot \frac{1}{2s} \cdot \frac{R}{sr} \cdot \det\begin{pmatrix} a\cos\alpha & b\cos\beta & c\cos\gamma \\ a & b & c \\ a\cos\beta\cos\gamma & b\cos\gamma\cos\alpha & c\cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{R^2 abc}{4rs^2} \cdot \det\begin{pmatrix} a\cos\alpha & b\cos\beta & c\cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{R^3}{s} \cdot (\cos\beta - \cos\alpha)(\cos\gamma - \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\gamma)$$

اعتماداً على الصيغة :

$$\cos\beta - \cos\alpha = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ab} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2abc}=\frac{(a-b)(s-c)}{2rR}$$

بإمكاننا أن نبسط التعبير السابق إلى :

$$\frac{1}{8sr^3}(s-a)(s-b)(s-c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

و بالاعتماد على صيغة هيرون : $rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$:

$$[OIH]=\frac{1}{8r}(a-b)(b-c)(c-a)$$

و هو المطلوب.

1.11 مسألة 1 :

لدينا المثلث ABC و ω الدائرة المارة برؤوسه . تقع النقطة P على امتداد $\overline{BC}$ بحيث يكون PA مماساً للدائرة ω . منصف الزاوية $\angle APB$ يقطع القطع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ في D و E على الترتيب . القطع $\overline{BE}$ و $\overline{CD}$ تلتقي في Q . إذا فرضنا أن PQ يمر في مركز الدائرة ω , احسب الزاوية $\angle BAC$.

الحل : نلاحظ أن $\angle PAB=\angle ACB$ إذن المثلثين PBA و PAC متشابهان . من التشابه نستنتج أن $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\frac{c}{b}$. إذا اعتماداً على مبرهنة المنصف الداخلي $\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}=\frac{c}{b}$ و كذلك $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{c}{b}$. و هنا نستطيع أن نحصل على الإحداثيات $D=(c:b:0)$ و $D=(b:0:c)$ و نستطيع أن نحدد النقطة Q بعد حل جملة معادلتي المستقيمين CD و BE لنحصل على $Q=(bc:b^2:c^2)$. لنضع $P=(0:m:n)$. بما أن النقط P , D و E تقع على استقامة واحدة , نستنتج أن : $\det\begin{pmatrix}0 & m & n\\ c & b & 0\\ b & 0 & c\end{pmatrix}=0$. أي $\frac{m}{n}=-\frac{b^2}{c^2}$. إذن نحصل على $P=(0:b^2:-c^2)$. أخيراً , لما أن النقط P , Q و O تقع على استقامة واحدة , نستنتج أن :

$$\det\begin{pmatrix} 0 & b^2 & -c^2 \\ bc & b^2 & c^2 \\ a\cos\alpha & b\cos\beta & c\cos\gamma \end{pmatrix} = bc\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ bc & b & c \\ a\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix} = 0$$

و بعد تبسيط العلاقة :

$$2abc\cos\alpha = bc^2\cos\beta + b^2c\cos\gamma = bc(c\cos\beta + b\cos\gamma) = abc$$

أي $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ و $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

1.12 الخاتمة :

الآن نصل إلى نهاية بحثنا . قمنا بشرح آلية عمل الإحداثيات المساحية و قوتها في حل مسائل الهندسة الإقليدية . لكن مهما حصل , لا يمكن أن نعتمدها كطريقة وحيدة للحل , ليست هذه إلا سلاح ضمن ترسانة الأسلحة التي تحوي أسلحة أخرى مثل التحويلات الهندسية و التوابع العقدية و غيرها من طرق الحل , التي باجتماعها مع الذكاء و الصبر , توصلنا إلى الحلول المثالية و تضعنا على طريق الميداليات العالمية .

1.13 المراجع

1. J.Bradley, Christopher. *Challenges in Geometry: for mathematical Olympians, past and present*. Oxford University Press. 2005.
2. Lovering, Thomas. *Areal Co-ordinates in Olympiad Geometry.* 2008.
3. Abel, Zachary. *Barycentric Coordinates.* 2007.
4. http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html

1.14 الفهرس