الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية

المركز الوطني للمتميزين

طريق إلى التكاملات المثلثية

إعداد الطالب:

محمد أديب باطوس

إشراف المدرس:

يمار حموي

مرتضى عياش

2015/2014

الفهرس

الهدف من البحث وإشكاليته:

1. **التعرف على تعريف التكامل والدالة الأصلية**
2. **التعرف على بعض أسس التكامل**
3. **التعرف على طرق إيجاد تكامل دالة**
4. **التعرف على تكامل الدوال من النوع:** $\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx$
5. **التعرف على تكامل الدوال من النوع:** $\int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x.\cos x\right)dx$
6. **التعرف على تكامل الدوال من النوع:** $\int R\left(\tan x, \cot x\right)dx$
7. **التعرف على التكاملات المثلثية على شكل جداء:**

$$\int \sin ax.\cos bx.dx$$

$$\int \cos ax.\cos bx.dx$$

$$\int \sin ax.\sin bx.dx$$

المقدمة

التحليل الرياضي هو فرع من فروع الرياضيات يتعامل مع الأعداد الحقيقية والأعداد العقدية والتوابع وهو يدرس مفاهيم الاستمرار والتفاضل والتكامل في أطرها العام[1] .

تاريخياً يمكن إرجاع هذا الفرع من فروع الرياضيات إلى القرن السابع عشر مع اختراع نيوتن حسابي التفاضل والتكامل، حيث كانت المشكلتين الذهبيتين لقيام هذا الفرع هي:

1 . إيجاد مماس منحني عند نقطة، عندها قام علم التفاضل .

2 . إيجاد مساحة منحني محصور بين نقطتين ، عندها قام علم التكامل .

وبعد تطور هذا العلم تم إيجاد مواضيع المعادلات التفاضلية وتحويلات فيورييه والعديد من المواضيع التي تقوم عليها معظم الأبحاث والفروع .

[1] تحليل (1). د. عمران.قوبا. المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا. 2009.

جدول التكاملات الأساسية:[2]

قائمة توضح تكاملات بعض الدوال الأولية التي تنتج مباشرة عن عملية اشتقاق الدوال الأولية ويمكن التحقق من صحة كل منها بالاشتقاق

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c; x \neq 0$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c; a > 0, a \neq 1$

5. $\int e^{ax}\, dx = \dfrac{1}{a} e^{ax} + c$

6. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$

7. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

10. $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c$

11. $\int \cot x .dx = \ln|\sin x| + c$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + c$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} dx = \dfrac{1}{2a} .\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + c$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

[2] أ.د. غازي هيفا ، الرياضيات (2)، كلية الهندسة المدنية ،جامعة تشرين 2004-2005

1-) الباب الأول: الدالة الأصلية و التكامل غير المحدد:[3]

في كثير من المسائل الهندسية والفيزيائية يطلب **إيجاد** $F(x)$ بحيث يكون مشتقها دالة معطاة $f(x)$ على سبيل المثال لنفرض أن الدالة $a(t)=\frac{dv}{dt}$ معطاة وهي تمثل **تسارع** جسم متحرك في اللحظة t حيث $a(t)=f(x)$ والمطلوب إيجاد $v(t)$ حيث $v(t)=F(x)$ فعندها نقوم بالبحث عن الدالة الأصلية التي تم اشتقاقها .

1-1-) الفصل الأول: تعريف الدالة الأصلية

يمكن من المثال الذي تم طرحه في بداية الباب أن نستنتج أن إيجاد الدالة الأصلية هو مسألة **معاكسة** لمسألة الاشتقاق وتكون بإيجاد جميع الدوال $F(x)$ التي مشتق كل منها يساوي الدالة $f(x)$

أما التعريف التحليلي للدالة الأصلية:

لتكن $f(x)$ دالة معرفة مستمرة على المجال $[a,b]$ نسمي الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$ إذا كان مشتق الدالة $F(x)$ هو $f(x)$ أي أن : $\frac{dF}{dx}=F'(x)=f(x);\forall x\in[a,b]$

ومن الواضح أنه إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن $F(x)+c$ دالة أصلية ل $f(x)$ حيث يمثل c ثابتاً

ومنه نستنتج وجود أسرة من الدوال الأصلية للدالة المعطاة $f(x)$ تختلف عن بعضها البعض بأعداد ثابتة

- **التكامل غير المحدد:**

إن مجموعة الدوال الأصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$ المعرفة على المجال Δ تعرف بالتكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ ونرمز لذلك ب $\int f(x)dx=F(x)+c$ حيث c ثابت التكامل و dx هو العنصر التفاضلي الذي يدل أننا نبحث عن الدالة الأصلية بالنسبة إلى ذلك المتحول .

على سبيل **المثال**:

$$\int ax^2da=x^2\frac{a^2}{2} \quad \text{و} \quad \int ax^2dx=\frac{ax^3}{3}$$

والتكامل غير المحدود في كلتا الحالتين **مختلف**.

وبالعودة إلى المسألة المطروحة في أول الباب **يمكن إيجاد** $v(t)$ بالعلاقة $v(t)=\int a(t)dt$ بفرض أنّ التسارع ثابت بالتالي $v(t)=\int adt=at+c$ ومن أجل حل محدد يكفي الحصول على سرعة في زمن محدد $v(t_0)=v_0$ بالتعويض نجد :

$$v_0=at_0+c \Rightarrow c=at_0-v_0 \Rightarrow v(t)=a(t-t_0)+v_0$$

[3] التكامل, د.عبد الباسط يونسو , بتصرف

ملاحظة: إن عملية إيجاد التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ هو عملية عكسية للتفاضل كما أن عملية إيجاد الدالة الأصلية معاكسة لعملية الاشتقاق.

1-2-) الفصل الثاني: بعض خواص التكامل غير المحدد

i. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ أي أنها إذا وردت إشارتي التفاضل d والتكامل $\int$ متعاقبتين فإنه يمكن اختصار الإشارتين.

ii. بما أن $F(x)$ هي **دالة أصلية** للدالة $F'(x)$ فإن $\int F'(x)dx = F(x)+c$ ويمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل $\int dF(x) = F(x)+c$

iii. **إذا كان للدالتين f_1, f_2 دالتين أصليتين ع المجال Δ فإن للدالة $f_1 \pm f_2$ دالة أصلية على هذا المجال ويكون :** $\int (f_1 \pm f_2)dx = \int f_1 dx \pm \int f_2 dx$

iv. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx : k \neq 0$

2-) الباب الثاني: طرق التكامل[4]

تدعى عملية إيجاد الدالة الأصلية لدالة بالمكاملة وهناك عدة طرق لمكاملة الدالة ولكن سنذكر أربعة طرق أساسية مع الأمثلة لإيجاد الدالة الأصلية لدالة ما

1-2-) الفصل الأول: الطريقة المباشرة

يمكن حساب عدد كبير من التكاملات مباشرة بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد وجدول التكاملات الأساسية.

مثال (1)

$$\int (5x^3 - 3x^2 + 2x + 7).dx$$

$$\int (5x^3 - 3x^2 + 2x + 7).dx = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + x^2 + 7x + c$$

مثال (2)

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,dx = (x-a)^{-k+1}.\frac{1}{-k+1}$$

[4] الرياضيات(2) , أ.د.غازي هيفا . بتصرف

مثال (3)

$$\int \sin x.\cos x.dx$$

$$\int \sin x.\cos x.dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x.dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c =$$

$$-\int -\sin x \cos x.dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

مثال (4)

$$\int e^{x^2+\ln(x)}dx$$

$$\int e^{x^2+\ln(x)}dx = \int e^{x^2} e^{\ln(x)}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

مثال (5)

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx - \int \frac{cax}{c(cx+d)} + \frac{bc}{c(cx+d)}dx =$$

$$= \int \frac{cax+ad}{c(cx+d)} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}dx =$$

$$= \int \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}.\frac{1}{cx+d}dx =$$

$$= \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}.\ln|cx+d| + c$$

مثال(6)

$$\int \left(1+\sqrt{x}\right)^4 dx$$

$$\int \left(1+\sqrt{x}\right)^4 dx = \int \left(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2\right)dx =$$

$$= x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + c$$

2-2-) الفصل الثاني: التكامل بالتعويض

إذا لم يمكن حساب التكامل لبعض الدوال بالطريقة المباشرة فإننا نلجأ لطريقة أخرى تمكننا من كتابة الدوال المستكملة بدلالة متحول آخر بشكل يبسط عملية التكامل ويمكن حساب التكامل الحاصل مباشرة بالاستناد إلى خواص التكامل غير المحدد وجدول التكاملات الأساسية

ليكن المطلوب حساب التكامل $\int f(x)dx$ ولم يكن بالإمكان حسابه مباشرة . لنفرض متحولاً جديداً $t = g(x)$ وتكون الدالة $x = w(t)$ حيث w قابلة للاشتقاق ومستمرة عندئذٍ $dx = w'(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int f(w(t)).w'(t).dt = F(t) + c$$

مثال (1)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

نفرض $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x+1}du \;\; x = u^2 - 1$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{u^2-1}{\sqrt{x+1}}.2\sqrt{x+1}.du = \int \;\; 2u^2 - 2.du = \frac{2}{3}u^3 - 2u + c$$

نجد بتعويض قيمة u **أن:** $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + c$

مثال (2)

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$$

نفرض $t = \ln x \Rightarrow dx = x.dt \Rightarrow \int \cos(t)dt = \sin(t)dt = \sin(\ln x) + c$

مثال (3) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx$

نفرض :

$$t = x^3 + 2 \Rightarrow dt = 3x^2.dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt[4]{t}}dt =$$
$$= \frac{1}{3}\int t^{\frac{-1}{4}}dt = \frac{4}{9}t^{\frac{3}{4}} + c = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(x^3+2)^3} + c$$

ملاحظة: بعض الأشكال المعقدة للتكاملات قد تتطلب تغيير المتحول أكثر من مرة حيث أنه نتيجة لتغيير المتحول في المرة الأولى تنتج دالة أبسط من الدالة الأولى إلا أنه لا تكامل مباشر ولذلك نلجأ لتغيير المتحول مرة أخرى

مثال (4)

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx = \int \frac{2\sin x.\cos x}{1+\sin^4 x}dx$$

ونفرض

$$t = \sin x \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x}dt$$

$$\int \frac{2\sin x.\cos x}{1+\sin^4 x}dx = \int \frac{2t}{1+t^4}\,dt$$

نفرض مجدداً

$$u = t^2 \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

وبالعودة إلى العلاقة الأولى والثانية **نجد:**

$$\int \frac{2t}{1+t^4}\,dt = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx = \arctan\left(\sin^2 x\right) + c$$

2-3- الفصل الثالث: التكامل بالتجزئة

بما أن المكاملة هي عملية معاكسة لعملية التفاضل فإن كل قاعدة من قواعد التفاضل يجب أن تقابلها قاعدة من قواعد التكامل وتنتج طريقة التكامل بالتجزئة من قاعدة تفاضل جداء دالتين

$$d(u.v)=u.dv+v.du \Rightarrow u.dv=d(u.v)-v.du \Rightarrow \int u.dv=v.u-\int v.du \Rightarrow \int u(x).v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x).u'(x)dx$$

ويمكن كتابة دالة $f(x)$ على شكل جداء دالتين $u(x),v'(x)$

مثال (1)

$$\int x\ln x\,dx$$

وعندها نفرض أن

$$v(x)=\frac{x^2}{2},u'(x)=\frac{dx}{x} \Leftarrow u(x)=\ln x,v'(x)=x$$

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c \Leftarrow$$

ملاحظة: يمكن أن يتطلب التكامل بالتجزئة مرات متتالية

مثال (2)

$$\int (x^3+1)\sin 2x\,dx$$

وعندها نفرض

$$u=x^3+1,dv=-\frac{1}{2}\sin 2x\,dx \Rightarrow u'=3x^2dx,v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int (x^3+1)\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}(x^3+1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int x^2\cos 2x\,dx \Leftarrow (1)$$

نكامل بالتجزئة أيضا ونفرض

$$dv=\cos 2x\,dx,u=x^2 \Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x,u'=2x\,dx$$

$$\int x^2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\int x.\sin 2x\,dx \Leftarrow (2)$$

نكامل بالتجزئة أيضا ونفرض

$$dv=\sin 2x\,dx,u=x \Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x,u'=dx$$

$$\int x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

نعوض الناتج في (2) **فيكون:**

$$\int x^2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x$$

نعوض الناتج في **(1) فنجد:**

$$\int (x^3+1)\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}(x^3+1)\cos 2x+\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+c$$

- بـعـض أشكا ل الـتـكا مـلات الـتـي تـتـم مـكا مـلـتـهـا بـطـريـقـة الـتـجـزئـة

1. التكاملات من الشكل:

$$\int p(x)\cos ax\,dx\,,\int p(x)\sin ax\,dx\,,\int p(x)e^{ax}\,dx$$

حيث $p(x)$ كثير حدود للمتحول x و a ثابت ما.

يجب هنا اختيار $u=p(x)$ وكل من $\cos ax\,dx\,,\sin ax\,dx\,,e^{ax}\,dx$ يجب اختياره dv

ملاحظة: مكاملة الدوال من الشكل $\int x^m\cos ax\,dx\,,\int x^m\sin ax\,dx\,,\int x^m e^{ax}\,dx$ تتم مكاملتها بالتجزئة m مرة

مثال (1)

$$\int x.\sin x\,dx$$

نفرض أن

$$dv=\sin x\,dx\ ,\ u=x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow v=-\cos x\ ,u'=dx\Rightarrow$$

بتطبيق دستور التكامل بالتجزئة نجد:

$$\int x.\sin x\,dx=-x.\cos x+\int\cos x\,dx=$$
$$=-x.\cos x+\sin x+c$$

مثال (2)

$$\int x^5e^{x^3}\,dx$$

نفرض :

$$t=x^3\Rightarrow dt=3x^2\,dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int x^5e^{x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int te^t\,dt$$

نحل بطريقة التجزئة نفرض:

$$dv=e^t\,dt\,,u=t\Rightarrow$$
$$\Rightarrow v=e^t\,,u'=dt\Rightarrow$$
$$\int x^5e^{x^3}\,dx=\frac{1}{3}\left(t.e^t-\int e^t\,dt\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(t.e^t-e^t\right)+c=$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^3-1\right).e^{x^3}+c$$

2. التكاملات من الشكل:

$$\int p(x).\ln^n x\,dx \qquad \int p(x).\arctan x\,dx \qquad \int p(x)\arcsin x\,dx$$

$$\int p(x).arc\cot x\,dx \qquad \int p(x)\arccos x\,dx$$

في هذه الحالة **نفرض** $dv = p(x).dx$ **وكل من** $\arctan x, \arccos x, \arcsin x, \text{arc}\cot x, \ln^n x$ فيجب اختياره u

مثال (1)

$$\int arc\sin x\,dx$$

نفرض أن:

$$u = arc\sin x\ ,\ dv = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = x\ , u' = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

نعوض في عبارة التكامل بالتجزئة فنجد:

$$\int arc\sin x\,dx = x.arc\sin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x.arc\sin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

مثال (2)

$$\int x\ln x\,dx$$

وعندها نفرض أن :

$$v(x) = \frac{x^2}{2}, u'(x) = \frac{dx}{x} \Leftarrow u(x) = \ln x, v'(x) = x$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c \Leftarrow$$

3. التكاملات التي يجب اجراؤها بالتجزئة مرتين متتاليتين من الشكل:

$$I_1=\int e^{ax}.\cos bx\,dx\,,I_2=\int e^{ax}.\sin bx\,dx$$

نفرض أن $dv=e^{ax}dx\,,u=\cos bx$ في عبارة I_1 ومنه:

$$du=-b\sin bx\,dx\,,v=\frac{1}{a}e^{ax}\Leftarrow$$

نطبق دستور التكامل بالتجزئة **نجد:**

$$I_1=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I_2$$

وبالمثل **نجد:**

$$I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}I_1$$

وبهذا الشكل حصلنا على معادلتين بالمجهولين I_2,I_1 و لحساب I_1 نعوض العلاقة الثانية في الأولى ,فنجد:

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{b.\sin bx+a.\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+c$$

$$I_2=\int e^{ax}.\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+c$$

مثال (1)

$$I=\int e^{x}.\cos 2x\,dx$$

نفرض أن:

$$dv=\cos 2x\,dx\,,u=e^{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x\,,u'=e^{x}dx$$

بتطبيق دستور التجزئة نجد:

$$I=\frac{1}{2}e^{x}.\sin 2x-\frac{1}{2}\int e^{x}.\sin 2x\,dx\quad(1)$$

نحسب التكامل الأخير بالتجزئة نفرض:

$$dv=\sin 2x\,dx\,,u=e^{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x\,dx\,,u'=e^{x}dx$$

نجد:

$$\int e^{x}.\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{x}.\cos 2x+\frac{1}{2}I$$

نعوض في (1) نجد

$$I=\frac{1}{2}e^{x}\sin 2x-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}e^{x}\cos 2x+\frac{1}{2}I\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{e^{x}}{5}\left(2\sin 2x+\cos 2x\right)+c$$

2-4- الفصل الرابع: التكامل بالتدريج

سنوضح استخراج قانون التدريج لحساب التكامل لبعض الدوال كالتالي:

لنكتب التكامل بالشكل الآتي: $I_n = \int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}.dx = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}.dx\right)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}.dx\right)(1)$$

حيث فرضنا أن:

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}$$

يحسب التكامل الثاني بطريقة التجزئة:

$$\int \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}.dx = \int x\,\frac{x.dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$$

نفرض أن:

$$u = x, dv = \frac{x.dx}{\left(a^2+x^2\right)^n} \Rightarrow u' = dx, v = \left(\frac{1}{2(1-n)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}\right)$$

فيكون:

$$\int \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx = \frac{x}{2(1-n)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}.\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{x}{2(1-n)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}.I_{n-1}$$

نعوض في العلاقة (1) **يكون:**

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{3-2n}{2(1-n)}I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}\right)$$

أو بالشكل:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}\right)[2]$$

حيث العلاقة [2] تمثل قانون التدريج , يمكننا حساب I_n بدلالة I_{n-1}, وهكذا لحساب I_{n-1} يجب حساب I_{n-2}،....،

وهكذا حتى نصل **لحساب:**

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

وكذلك يمكن تطبيق طريقة التدريج لحساب التكاملات من الشكل:

$$I_n = \int \cos^n x\,.dx \,, x \,, \quad _n = \int \sin^n \ .\ dx$$

فمثلاً لحساب

$$I_n = \int \cos^n x\,.dx$$

نفرض أن

$$dv = \cos x\,.dx \quad \text{و} \quad u = \cos^{n-1} x$$

ثم نطبق دستور التكامل بالتجزئة فنحصل على المطلوب.

3- الباب الثالث: تكامل الدوال المثلثية[5]

هناك العديد من الدوال التي لا يمكن مكاملتها مباشرة حسب طرق التكامل ومنها العديد من العلاقات المثلثية

3-1- الفصل الأول: تكامل الدوال من الشكل: $\int R(\sin x, \cos x)dx$

نسمي تكاملات التوابع المثلثية التكاملات من النوع $\int R(\sin x, \cos x)dx \ (1)$ **حيث** $\int R(\sin x, \cos x)dx$ تابع كسري

باستخدام التحويل $t = \tan \frac{x}{2}$ فإن هذا التكامل يتحول إلى تكامل كسري ل t من أجل $x \in]-\Pi + \Pi[$ **يكون:**

$$\sin x = \frac{2\sin \frac{x}{2} . \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin \frac{x}{2} . \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

نبسط البسط والمقام على $\cos^2 \frac{x}{2}$ **فنجد** :

$$\sin x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

وكذلك نعلم أن $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ **فيكون:**

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}$$

وبتبسيط البسط والمقام على $\cos^2 \frac{x}{2}$ **نجد:**

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

وبما أننا **فرضنا:**

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \arctan t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

بالتالي التكامل في العلاقة **(1) يتحول إلى:**

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$ **وهو تكامل كسري بالنسبة ل** t.

---

[5] الرياضيات(2), أ.د.غازي هيفا ,بتصرف

مثال (1)

$$I=\int\frac{dx}{\sin x}$$

نفرض $t=\tan\frac{x}{2}$، **فيكون** $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

ونعلم أن:

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ نعوض في التكامل **فنجد** :

$$I=\int\frac{2dt}{1+t^2}.\frac{1}{2t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

مثال (2)

$$I=\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+3}$$

نفرض $t=\tan\frac{x}{2}$ **فيكون** $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

ولدينا $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ نعوض في التكامل **فنجد:**

$$I=\int\frac{2dt}{1+t^2}.\frac{1}{2.\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}=\int\frac{2dt}{4t-(1-t)^2+3(1-t)^2}=$$

$$=\int\frac{2dt}{4t^2+4t+2}=\int\frac{dt}{2t^2+2t+1}$$

وبما أن المقام لا يقبل جذورا حقيقية **فنتمم** إلى مربع كامل:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\frac{(2t+1)^2}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2.\frac{1}{4}}\int\frac{dt}{(2t+1)^2+1}=$$

$$=2.\int\frac{dt}{1+(2t+1)^2}$$

نفرض أن $u=2t+1$ فيكون $du=2dt$ بالتعويض في التكامل **نجد:**

$$I=\int\frac{du}{1+u^2}=\arctan u+c=\arctan(2t+1)+c=\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}+1\right)+c$$

3-2- الفصل الثاني: حالات خاصة في حساب التكامل من الشكل $\int R\left(\sin x,\cos x\right).dx$

هناك بعض الحالة الخاصة لتكامل الدوال ذات العلاقة من الشكل $\int R\left(\sin x,\cos x\right).dx$ **تصل إلى علاقات معقدة عند اعتبار المتحول** $t=\tan\frac{x}{2}$

a) **إذا كان التابع** $R\left(\sin x,\cos x\right)$ **يحقق العلاقة** $R\left(-\sin x,\cos x\right)=-R\left(\sin x,\cos x\right)$

فإن التحويل $t=\cos x$ **يجعل التكامل** (1) **تكامل كسري بالنسبة ل** t

b) **إذا كان التابع** $R\left(\sin x,\cos x\right)$ **يحقق العلاقة :** $R\left(\sin x,-\cos x\right)=-R\left(\sin x,\cos x\right)$

فإن التحويل $t=\sin x$ **يجعل التكامل** (1) **تكامل كسري بالنسبة ل** t

مثال (1)

$$I=\int\frac{\sin^3 x+2\sin x}{1+\cos x}.dx$$

تتحقق الحالة الخاصة في هذه الدالة حيث: $R\left(-\sin x,\cos x\right)=-R\left(\sin x,\cos x\right)$

نفرض $t=\cos x$ **فيكون** $\sin^2 x=1-t^2$ **ويكون** $\sin x.dx=-dt$ **ويتحول التكامل إلى الشكل:**

$$I=\int\frac{\left(\sin^2 x+2\right)\sin x.dx}{1+\cos x}=-\int\frac{\left(1-t^2+2\right).dt}{1+t}=-\ln\left(1+t\right)^2+\frac{t^2}{2}-t+c$$

$$\Rightarrow I=-\ln\left(1+\cos x\right)^2+\frac{\cos^2 x}{2}-\cos x+c$$

مثال (2)

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}.dx$$

تتحقق الحالة الخاصة في هذه الدالة حيث: $R\left(\sin x,-\cos x\right)=-R\left(\sin x,\cos x\right)$

نفرض أن:

$$t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x.dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}.dx=\int\frac{\left(1-t^2\right)}{t^2}.dt=$$
$$=-\frac{1}{t}-t-c=$$
$$=-\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin x}\right)+c$$

3-3- الفصل الثالث: تكامل الدوال من النوع $\int R\left(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x.\cos x\right)dx$

إذا كان التابع $R\left(\sin x,\cos x\right)$ من الشكل : $R^{\bullet}(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x.\cos x)$

فإننا نجري التحويل $t=\tan x$ عندئذٍ يكون:

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+1}=\frac{t^2}{1+t^2}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$$

ومنه نجد:

$$dx=\frac{dt}{1+t^2}\ \text{ولدينا}\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\cos x=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

أي من أجل أي مجال لا يحتوي على جذور مقام التابع R فإن التكامل يتحول إلى تكامل تابع كسري بالنسبة إلى t

$$R^{\bullet}\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2},\frac{t}{1+t^2}\right)dt$$

مثال(1)

$$I=\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}.dx$$

نفرض $t=\tan x$ عندئذٍ يكون:

$$dx=\frac{dt}{1+t^2}\ \text{و}\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$$

نعوض في التكامل فنجد :

$$I=\int\frac{t^2}{\left(t^2+1\right).\left(1+\frac{1}{t^2+1}\right)}.\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2.dt}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+2\right)}=\int\left(\frac{-1}{1+t^2}+\frac{2}{2+t^2}\right)=$$

$$=-\arctan t+\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+2=-x+\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

4-3) الفصل الرابع : حساب التكامل من النوع $\int R(\tan x, \cot x)dx$

يتم فرض $t=\tan x$ فيكون $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ و $\cot x=\dfrac{1}{t}$

مثال (1)

$$I=\int \frac{dx}{\tan x+\cot x}$$

نفرض أن $t=\tan x$ فيكون $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ و $\cot x=\dfrac{1}{t}$

نعوض في التكامل فنجد:

$$I=\int \frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t+\frac{1}{t}}=\int \frac{t.dt}{\left(1+t^2\right)^2}$$

نفرض $u=1+t^2 \Rightarrow \dfrac{du}{2}=t.dt$ ومنه نجد :

$$I=\int \frac{\frac{du}{2}}{u^2}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}=\frac{1}{2}\int u^{-2}.du=\frac{-1}{2u}+2=\frac{-1}{2\left(1+t^2\right)}+c=\frac{-1}{2\left(1+\tan^2 x\right)}+c$$

3-5) الفصل الخامس: التكاملات من النوع:

$$\int \sin ax .\cos bx .dx ,\int \cos ax .\cos bx .dx ,\int \sin ax .\sin bx .dx$$

في التكاملات السابقة نحول الجداء إلى مجموع وذلك باستخدام دساتير التحويل وهي:

$$\sin ax .\cos bx .dx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(a+b\right)x + \sin(a-b)x\right)$$

$$\cos ax .\cos bx .dx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

$$\sin ax .\sin bx .dx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$$

مثال (1)

$$I = \int \sin 4x .\cos 2x .dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \sin 6x .dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x .dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{6}\right)\cos 6x + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\cos 2x + c =$$

$$= \frac{-1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

مثال (2)

$$I = \int \cos 6x .\cos 2x .dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \cos 8x .dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x .dx =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

مثال (3)

$$I = \int \sin 9x .\sin x .dx$$

$$I = \int \frac{1}{2}\frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 10x}{2.20} + c =$$

$$= \frac{\sin 8x}{16} - \frac{\sin 10x}{20} + c$$

الخاتمة

تعرفنا من هذه الدراسة على مفهوم التكامل وقواعده الأساسية وبعض طرق إيجاد تكامل دالة و طرق إيجاد التكاملات المثلثية التي تشكل الطريق الرئيسي للدخول في عالم التكامل المحدد والتكاملات الثنائية والعديد من العناوين حيث تسمح لنا في توظيف التكاملات والخبرات الرياضية المتراكمة في الحياة العملية كحساب المساحة والحجوم وطول منحني أملس ومركز ثقل صفيحة مستوية والعديد العديد من التطبيقات العملية.

و أخيراً أوصي بالبحث و التوسع في هذا المجال للوصول لطرق جديدة لإيجاد التكاملات و تطبيقات جديدة في المجالات المتنوعة.

قاموس المصطلحات[6]

Idefinite Integral	تكامل غير محدود
Integrable	قابل للتكامل
Equation	معادلة
Integration by parts	تكامل بالتجزئة
Integration by substation	تكامل بالتعويض
Rational function	دالة كسرية
Trigonometric function	دالة مثلثية
Variable	متحول
Coefficients	معاملات–أمثال
Definition	تعريف
differentiable	قابل للتفاضل

[6] التحليل(2),محمد حسن دريباتي, جامعة تشرين , كلية العلوم , ص347

المراجع:

1. أ.د. غازي هيفا ، الرياضيات (2)، كلية الهندسة المدنية ،جامعة تشرين 2004–2005

2. د . محمد حسن دريباتي ، د.عبد الباسط يونسو، التحليل (2)،كلية العلوم ،جامعة تشرين2008–2009

3. د. عبد الباسط يونسو ، أ. خديجة قعقع،أ.سلوى يعقوب ، التكامل ، كلية العلوم ، جامعة تشرين 2007–2008

4. د. عمران قويا ، التحليل ،الجزء الأول ،المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا ،2009