**طريق للمعادلات التفاضلية**

حلقة بحث مقدمة لمادة الرياضيات

‏2015

Ncd

Ayham alhamad

‏2015

**الجمهورية العربية السورية**

**وزارة التربية**

**المركز الوطني للمتميزين**

**تقديم الطالب : أيهم الحمد**

**بإشراف المدرسة :يمار حموي**

**للعام الدراسي : 2014 - 2015**

|  |  |
| --- | --- |
| رقم الصفحة | العنوان |
| 3 |  | *المقدمة* |
|  |  **المعادلات التفاضلية من ذات الأولى**  | **الباب الأول** |
| 5 | **تعاريف في المعادلات التفاضلية وحلولها** | الفصل الأول1.1 |
| 8 | **المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق** | الفصل الثاني2.1 |
| 11 | **المعادلات التفاضلية التامة** | الفصل الثالث3.1 |
|  | المعادلات غير التامة و عامل التكميل | **الباب الثاني** |
| 17 | عامل التكميل وطرق ايجاده | الفصل الأول1.2 |
| 22 | طرق ايجاد عامل التكميل لبعض المعادلات الخطية | الفصل الثاني2.2 |
| 26 | تطبيقات في الفيزياء للمعادلات التفاضلية | الفصل الثالث3.2 |
| 29 |  | الخاتمة |
| 30 |  | المصادر والمراجع |

**اهداء**

 إلى كل عين ساهرة في سبيل رفعة هذا الوطن وفي مقدمتهم أبطال الجيش العربي السوري بقيادة الفريق الدكتور بشار حافظ الأسد راعي مسير ة التقدم والتطور في سوريا و إلى عقيلته السيدة أسماء الأسد و الى شهيد تـ راب هذا الوطن الى رفاق الد رب فريق المـ ركز الوطني للمتميزين إدا رةً وطلاباً إلى كل من ساهم و يساهم وسيساهم في تطور وبناء هذا الوطن وإلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل و إلى والدتاي أمي و سوريا .

مقدمة

  **إن مادة التحليل الرياضي هي عصب العلوم النشط وهي من أهم أفرع الرياضيات التي يعتمد عليها العلم الحديث فهي تشكل قفزة نوعية في مختلف العلوم و يجب أن لا ننسى قسم مهم من هذه المادة وهي المعادلات التفاضلية بأشكالها المختلفة وطرق حلها فهل تعرف شيء عن هذا الباب الذي يفتح اّفاق كثيرة بعده ؟؟فان المعادلات التفاضلية هي أساس لكثير من المواد العلمية و التطبيقات الحياتية حيث تعتمد عليها الكثير من التطبيقات في الفيزياء ومختلف العلوم التطبيقية فمثلا نستطيع حل العديد من المسائل التفاضلية بواسطة المعادلات.
 مثلاً معادلات الحركة تعطينا القدرة على التنبّؤ بموقع الجسم في المستقبل عندما يتحرّك وطاقته الحركيّة والكامنة... إلخ. في الكثير من مسائل الفيزياء نحتاج إلى دراسة التغيّرات التي تطرأ على الأجسام من خلال علاقات تفاضليّة بين المتغيّر المستقلِّ والمتغيّر الغير مستقلّ أي من خلال علاقة تابع Function تفاضليّة.
فهل نستطيع حل هذه المعادلة بالطرق العادية وماهي طرق حلها ؟؟؟
وهل نستطيع ايجاد حلول هذه المعادلة؟؟؟وهل يمكننا حل أي معادلة من شكلها أو من شكل خطي ؟؟؟
وودنا وضع هذا البحث في يدكم لكي تتمكنوا من التعرف على المعادلات التفاضلية ومعرفة أشكالها وتحويلها من شكل لاخر لتبسيط حلها وذلك بالعديد من الطرق وأحدها عامل التكميل والتي سنتعرف عليها في هذا البحث.**

**أهداف البحث**

**نهدف من هذا البحث الى**:

* **تصنيف المعادلة التفاضلية من حيث الرتبة والدرجة والخطية**
* **دراسة المعادلات التفاضلية وأنواعها والتعرف على طرق حلها .**
* **التعرف على المعادلات التفاضلية المنفصلة المتحولات و المتجانسة وطرق حلهما .**
* **دراسة و حل المعادلات التفاضلية التامة وغير التامة من الدرجة الأولى .**
* **حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى .**
* **دراسة عامل التكميل وطريقة ايجاده .**
* **حل بعض المعادلات الجزئية والعادية .**
* **التعرف على بعض التطبيقات للمعادلات التفاضلية في الفيزياء .**

**الباب الأول: أنواع المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى و طرق حلها**

1.1الفصل الأول**: تعاريف في المعادلات التفاضلية**

**المعادلة التفاضلية (Differential equation)** :هي كل معادلة تحوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحولات وهي من الشكل



مثال:  

وتصنف المعادلة التفاضلية الى :

1. **معادلة تفاضلية عادية** : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات عادية لتابع أو أكثر

مثال : 

1. **معادلة تفاضلية جزئية** : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات جزئية لتابع أو أكثر مثال:



1. **المعادلة التفاضلية العادية الخطية** :هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة لكل من التابع أو التوابع ومشتقاتها و لا تحوي على جداءات لها .
2. **المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية** :هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة للمشتقات الجزئية للتابع أو التوابع الموجودة.ملاحظة:
3. ان مرتبة المشتق هي مرتبة أعلى مشتق موجود في المعادلة
4. **ويمكن تحويل المعادلة التفاضلية من شكل لآخر لتسهيل حلها**

 **حل المعادلة التفاضلية** : نقول عن تابع  أنه حل للمعادلة التفاضلية اذا حقق شرطان :



حيث تقسم حلول المعادلة التفاضلية[[1]](#footnote-1) الى

**الحل عام للمعادلة التفاضلية :** وهو الحل الذي يحوي ثوابت اختيارية في المعادلة التفاضلية ويكون من الشكل : 

**مثال:** حل المعادلة العام : 

 

حيث  ثابتان اختياريان.

**الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: هو الحل الذي نحصل عليه بإعطاء قيم عددية للثوابت الموجودة للحل العام للمعادلة التفاضلية**

**مثال : :** حل المعادلة الخاص : 



**ملاحظة هامة :**نستطيع الحصول على حل شاذ للمعادلة وهو الحل الذي لا يمكن الحصول عليه من الحل العام وانما نحصل عليه أثناء حل المعادلة

**طرق حل المعادلات التفاضلية** : على عكس ما يظن الكثير فان العديد من المعادلات التفاضلية غير ممكنة الحل لحد الأن أما التي نستطيع حلها بطرق معروفة ودقة تامة هي معادلات قليلة نسبة للأولى وعند حل بعض المسائل فإننا نوجد جميع الحلول أو بعضها وفي هذا البحث سنحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والتي هي من الشكل  .

2.1الفصل الثاني:

**تعريف :** معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة ( (D.E of with separated variables :كل معادلة تفاضلية من الشكل  حيث يمكن إعادة صياغتها بحيث تجتمع  و في أحد طرفيها و  في الطرف الأخر هي.

حيث تكتب بالشكل:  (3)

المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق **:**

[[2]](#footnote-2)

وتدعى هذه المعادلة ذات متحولات منفصلة إذا كان N تابع  وM تابع  ويمكن كتابتها بشكل عام : 

وهي قابلة للمكاملة مباشرة :

 

وبإجراء المكاملة نجد أن الحل العام هو



مثال : 

هي ذات متحولات منفصلة وتكاملها العام هو :

وهناك عدد كبير من المعادلات التي يمكن تحويلها لمنفصلة المتحولات ببعض العمليات البسيطة وسنناقش العديد من الحالات الي يمكن تحويلها لهذا الشكل :

1. المعادلة من الشكل :



حيث نعيدها الى منفصلة المتحولات بالتقسيم على 
فتصبح ذات متحولات منفصلة من الشكل 

1. المعادلة من الشكل :



حيث نعيده الى ذات متحولات منفصلة بتقسيم طرفيها على 

لتصبح من الشكل :



1. المعادلة من الشكل : 

تصبح منفصلة بإجراء تغيير في التابع بعلاقة من شكل:

 

وبالتعويض نجد أن  بالتعويض تصبح من الشكل:



فتكتب بالشكل : 

فحلها العام : 

و بالعودة للمعادلة السابقة نجد أن 

علما أن أي جذر للمعادلة  قد يكون حلا للمعادلة

1. المعادلة من الشكل  بحيث  تابعان مستمران

حيث أن هذه المعادلة تكتب بالشكل  أو  فتصبح ذات متحولات منفصلة .
إذا كان   كان التابع الثابت  حلا للمعادلة التفاضلية

$

**المعادلات التفاضلية المتجانسة homogeneous D.E.**

[[3]](#footnote-3)

نسمي المعادلة من الشكل : 

معادلة متجانسة من الدرجة الأولى اذا كان التابعان  متجانسان من الدرجة نفسها

حيث يمكن تعويض كل  بـ و  ب 

وللتعرف على المعادلة المتجانسة يجب التعرف على التابع المتجانس حيث التابع المتجانس هو كل تابع معرف على مجال غير تافه حيث يكون من الرتبة  اذا استطعنا ان نستبد فيه كل  بـ وكل  بـ بحيث يحقق المتطابقة :



مثال :  حيث الأولى متجانسة من الدرجة الأولى والثانية متجانسة من الدرجة الثانية .

لإيجاد حل للمعادلة المتجانسة :تؤول المعادلات المتجانسة إلى دراسة معادلات تفاضلية ذات متحولات منفصلة وذلك بإجراء تغيير في التابع المجهول 

 في الحقيقة تصبح المعادلة التفاضلية التي يحققها  هي:



فنحصل على معادلة ترد الى منفصلة الحلول

**مثال** : حل المعادلة التالية :



لنضع  فيكون  وعليه فإن



ولهذه المعادلة متحولات منفصلة هما  وهذا يعطي للمعادلة حلين شاذين هما 

لنفترض أن  من الواضح هنا أن تعبير التابع المجهول ثم نقوم بمكاملة هذه المعادلة 

فنجد 

ومنه

وعليه 

**3.1 الفصل الثالث:**

**المعادلة التفاضلية التامة Exact differential equation :**

ليكن  تابعين معرفين ومستمرين حيث أنهما لا ينعدمان في ان واحد فنسمي المعادلة التفاضلية التي تكتب بالشكل:

 

بمعادلة تفاضلية تامة اذا كان الطرف الايسر تفاضلا تاما لتابع مثل  واذا لم تكن فتكون معادلة تفاضلية غير تامة.

**مبرهنة :**لنفرض أن المعادلة التفاضلية 1 تامة عندها يوجد تابع  بحيث يكون تفاضله الكلي مطابقا للطرف الايسر:

 حيث التكامل العام في هذه المعادلة يعطى بالشكل :  [[4]](#footnote-4)

**مثال :**
حيث يمكن كتابتها بالشكل :
ثم للشكل 

حيث هي مجموع تفاضلات تامة تكتب بالشكل :





**س**. كيف نتمكن من معرفة فيما اذا كانت المعادلة التفاضلية (1) تامة أم لا وكيف نوجد التابع  (أي التكامل العام ) ؟

مبرهنة :بفرض أن التابعين  مستمران عندئذ الشرط اللازم والكافي كي تكون المعادلة (1) تامة هو تحقق المتطابقة 
وعندها يكون التكامل العام للمعادلة التفاضلية السابقة معطى بالعلاقة :



علما أن  ثابت كيفي و نقطة اختيارية من 

فعند تحقق المطابقة فيجب تحقق العلاقتين :



ومن أجل الحصول عليه نكامل احدى العلاقتين جزئيا فنجد :



حيث  تابع كيفي بالنسبة لـ بحيث يكون :





ومن العلاقة 

بالتعويض 

وبالاختصار : 

و بالمكاملة نجد أن :



وبالتعويض:



وبجعل هذا التابع مساويا لثابت كيفي نحصل علة التكامل العام للمعادلة المعطاة أي :



مثال : حل المعادلة التفاضلية التامة :

 الحل :

لدينا 

فإن المعادلة التفاضلية تامة فإنه يوحد تابع  يحقق :
 

بالمكاملة نجد:

و باشتقاق الطرفين بالنسبة الى  ومساوة الناتج مع  نجد:




وبالمكاملة نجد أن : 

بالتعويض : 

تعريف : نسمي معادلة تفاضلية خطية سلمية من المرتبة الأولى كل معادلة من الشكل او قابلة التحويل للشكل 

حيث تابعان مستمران على المجال المفتوح  [[5]](#footnote-5)

مبرهنة: ليكن I مجالا مفتوحا وغير تافه منR وليكن a و b تابعين مستمرين على المجال و يأخذان القيم في R ليكن  تابعا أصليا للتابع  على  و تكون مجموعة حلول المعدلة التفاضلية



هي  حيث :



الإثبات

لدينا  فمنه فهو حل للمعادلة والعكس صحيح.

**الباب الثاني**: عوامل التكميل وطرق ايجادها

1.2الفصل الأول :

عوامل التكميل لـ Intergrating factor :

نستخدم عامل التكميل لتحويل المعادلة غير التامة الى تامة حيث هو أحد الطرق لحل المعادلة التفاضلية غير التامة .

**تعريف :** نقول أن التابع  عامل اذا اصبحت المعادلة بعد الضرب به معادلة تفاضلية تامة.[[6]](#footnote-6)

حيث أن عامل التكميل  يجب أن يحقق المطابقة التالية : 

وباجراء الاشتقاق اللازم نجد أن :



وبعد الترتيب نجد أن :

المعادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الاولى بالنسبة للتابع للمجهول وتدعى معادلة لاغرانج ونستطيع ايجاد حل خاص لها وذلك بالفرض والتجديد .

**عامل التكميل التابع** لـ :
ان شرط وجود عامل تكميل  يجب أن يحقق 
 و أن يحقق  والمعادلة السابقة تصبح على الشكل :



 وهنا نلاحظ أنه اذا كان الطرف الايمن تابعا لـ فقط فيمكن مكاملته بسهولة وبالتالي يمكن تعيين : 

وبما ان : 

وبمكاملة الطرفين نجد أن :



اما اذا لم يكن الطرف الايمن تابع لـ فقط فان المعادلة غير قابلة للمكاملة .

**مثال:**



غير تامة وذلك لان :

و لنحاول ايجاد عامل تكميل لهذه المعادلة من الشكل  و بالتأكد من الشرط نجد أن : 

أي أن الشرط محقق

وبالمكاملة نجد أن:

بعد الضرب بعامل التكميل : 

باستخدام العلاقة السابقة حيث  نجد أن :

ويمكن الحصول على التكامل العام للمعادلة بطريق تجميع الحدود وذلك بكتابة المعادلة بالشكل :



**و الحل العام .**  

**عامل التكميل التابع** لـ  :

إن شرط الذي من أجله يوجد عامل تكميل تابع لـ فقط أي 

هو أن يكون  حيث تأخذ المعادلة الشكل :



حيث اذا كان الطرف الايسر تابع لـ فان المعادلة يمكن حلها

وبمكاملة العلاقة السابقة نجد أن



**مثال :**

** الحل :** إن هذه المعادلة غير تامة :  ومنه : 

لنفتش عن عامل تكميل للمعادلة من الشكل  فنجد أن :



ومنه فان :


لنضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل  فنحصل على المعادلة التفاضلية التامة التالية : 
ومنه نجد أن : 

ويكون التكامل العام للمعادلة التفاضلية : 

حيث يمكن تحويل المعادلة التامة الى مجموع التفاضلات التامة.

 و بالتالي يكتب على شكل تفاضل تام واحد هو :



وبالمكاملة نجد أن التكامل العام هو :



عامل التكميل من الشكل  [[7]](#footnote-7)

نفرض أن عامل التكميل  تابع لتابع معلوم ومفروض مثل  حيث 
فيكون : وشرط أن تكون المعادلة قابلة

للحل هو :



حالات خاصة من الحالة العامة :

1-عامل التكميل التابع لـ نضع  بالتعويض نجد أن :



2-عامل التكميل من الشكل  وبالمثل نجد أن :



**مثال : حل المعادلة :**

الحل :المعادلة السابقة غير تامة لان



للبحث عن معامل تكميلي من الشكل: 



ومنه يكون عامل التكميل :



الفصل الثاني :

حالات خاصة لايجاد عامل التكميل:

**الطريقة 1:**

**اذا تمكننا من وضع المعادلة التفاضلية على شكل مجموع معادلتين تفاضليتين من الشكل:**

**
يمكن في بعض الاحيان ايجاد عامل التكميل لهذه المعادلة بعد معرفة عاملي التكميل للمعادلتين**



وبفرض  العامل التكميلي للمعادلة الاولى وان  عامل تكميلي للمعادلة الثانية  حيث يوجد عامل تكميلي للمعادلة الرئيسة اذا تحقق الشر الاّتي بحيث يكون : 

**مثال :** حل المعادلة التفاضلية :



نلاحظ أن المعادلة التفاضلية : 

تقبل عامل تكميل : 

وحلها العام: 

ان المعادلة التفاضلية : 

تقبل عاملا تكميل : 

وان حلها العام : 

لنبحث عن التابعين  بحيث يكون :



بما أن :



فمنه يجب ان يتحقق :



ومنها نجد  

وهو عامل تكميل للمعادلة التفاضلية و بعد الضرب بعامل التكميل تصبح المعادلة من الشكل :

 

او : 

وتكاملها العام : 

**حالة**  :

اذا أمكن كتابة المعادلة على الشكل :

وبفرض 

اذا امكن تعيين عامل تكميل للمعادلة التفاضلية :

يتعلق ب فقط كان هذا العامل تكميل للمعادلة الاصلية.

**حالة**  : في بعض الحالات يمكن الانتقال من المتحولات  الى متحولات جديدة  حيث  و  وذلك لايجاد عامل تكميل للمعادلة

مثال:

حل المعادلة التفاضلية الاتية :



الحل :

 

نفرض أن : أو  وبالتالي نجد أن :



بالتعويض : 

وهي من الشكل :

لنفتش عن عامل تكميل من الشكل  :



ومنه :

وبالتالي عامل التكميل :



نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فنجد :

 

ويكون التكامل العام :

بالرجوع الى المتحولات نجد :

الفصل الثالث :

**تطبيقات في الفيزياء للمعادلات التفاضلية :**

مسائل درجة الحرارة[[8]](#footnote-8)
ينص قانون نيوتن للتبريد على ان ( معدل التغير الزمني لدرجة حرارة جسم يتناسب طردياً مع الفرق في درجتي حرارة الجسم والوسط المحيط به ) فاذا كانت  هي درجة حرارة الجسم و  هي درجة حرارة الوسط المحيط فان معدل التغير الزمني لدرجة حرارة الجسم ويمكن صياغة قانون نيوتن للتبريد كالآتي :



**مثال** :(1) وضعت قطعة معدنية درجة حرارتها 100 في مختبر درجة حرارته ثابتة عند 0 ، بعد 20 min اصبحت درجة حرارة القطعة 50 أوجد :
1) الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القطعة الى 25? .
(2درجة حرارة القطعة بعد 10 min.

مسائل السقوط الحر :
لنعتبر ان جسماً كتلته M ساقطاً من اعلى متأثراً فقط بالجاذبية الارضية g ومقاومة الهواء التي تتناسب طردياً مع سرعة الجسم ، نفرض ان كل من الجاذبية الارضية والكتلة ثابتان وباستعمال قانون نيوتن الثاني للحركة والذي ينص على ان (محصلة القوى المؤثرة على جسم تساوي المعدل الزمني لتغير كمية الحركة مضروباً بالكتلة الثابتة ) أي ان



حيث F هي محصلة القوى المؤثرة على الجسم و v هي سرعة الجسم ، كلاهما عند الزمن t
هنا لدينا قوتان تؤثران على الجسم هما الاولى وزن الجسم W=Mg والثانية هي قوة مقاومة الهواء  حيث هو ثابت التناسب والاشارة السالبة هنا لان اتجاه القوة عكس اتجاه السرعة وبالتالي فان محصلة القوى هي
 
من المعادلتين (2) و (1) و بالقسمة على M نحصل على



ثم نقوم بحل هذه المعادلة.

مسائل الدوائر الكهربائية :
تتكون الدائرة الكهربائية البسيطة من مقاومة R بالأوم ومكثف C بالفاراد وحث L بالهنري وقوة دافعة كهربائية ( ق .د .ك ) E بالفولت وبطارية أو مولد متصلين جميعهم على التوالي . يُقاس التيار i بالأمبير والشحنة q على المكثف بالكولوم .
وينص قانون كيرشوف على ان ( المجموع الجبري للجهد حول دائرة بسيطة مغلقة يساوي صفر ) .
ومعلوم لدينـا ان فرق الجهد خلال مقاومة هو Ri
و خلال المكثف هو V\_c .



وهي معادلة تفاضلية من ذات متحولات منفصلة .

**الخاتمة**

**بعد إتمام هذا البحث تمكنا من استنتاج أن :**

**المعادلة التفاضلية :هي كل معادلة تحوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحولات وتكون مرتبتها هي مرتبة أعلى حد فيها .
إن شكل المعادلات التفاضلية ذات المتحولات منفصلة :
 
إن المعادلات التفاضلية المتجانسة توابعها تحقق المتطابقة :
 **

**إن شكل المعادلة التفاضلية التامة اذا كان الطرف الايسر تفاضلا تاما لتابع **

**إن عامل التكميل هو علاقة نضرب بها المعادلة التفاضلية لتصبح المعادلة الغير التامة معادلة تامة حيث استطعنا بواسطته حل العديد من المعادلات التفاضلية الجزئية والعادية.**

**يوجد عوامل تكميل لـ و يجب ان تكون معادلته بدلالة فقط**

 **عوامل تكميل لـ حيث يجب ان تكون معادلته بدلالة فقط ويوجد عوامل تكميل لكليهما**

**للمعادلات التفاضلية استخدامات متعددة في الفيزياء و الهندسة و العديد من المجالات حيث نستطيع استخدامها في معادلات الحركة للسقوط و معادلات الترموديناميك (الحرارة ) و المكثفات والدارات الكهربائية .**

المر اجع والمصادر

* محمد عادل سويدان ,التحليل الرياضي ,515 لعام 1982م ,الجزءالثالث ,مطبعة جامعة دمشق
* أ.د عمران قوبا ,تحليل , الجزء ثالث , المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا 2002

أ.د زياد الأمير ,معادلات تفاضلية , 1992 ,مديرية الكتب للمطبوعات الجامعية

James stewart , Calculus early transcendentals ,sixth edition ,2006

serway jewett , physics for scientists and engineers , edition th6

1. ص74 أ.د .محمد عادل سويدان ,التحليل الرياضي ,515 لعام 1982م ,الجزءالثالث ,مطبعة جامعة دمشق [↑](#footnote-ref-1)
2. ص171 أ.د عمران قوبا ,تحليل , الجزء ثالث , المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا 2002 [↑](#footnote-ref-2)
3. صـ184 أ.د عمران قوبا ,تحليل ,. جزء ثالث , المعهد العالي للعلوم التطبيقية . [↑](#footnote-ref-3)
4. ص64 معادلات تفاضلية ,أ.د زياد الأمير ,1992 ,مديرية الكتب للمطبوعات الجامعية. [↑](#footnote-ref-4)
5. ص179 أ.د عمران قوبا ,تحليل ,. جزء ثالث , مركز البحوث [↑](#footnote-ref-5)
6. ص61 أ.د زياد الأمير ,معادلات تفاضلية , 1992 ,مديرية الكتب للمطبوعات الجامعية. [↑](#footnote-ref-6)
7. صـ76 معادلات تفاضلية ,أ.د زياد الأمير ,1992 ,مديرية الكتب للمطبوعات الجامعية. [↑](#footnote-ref-7)
8. صـ 624 , serway jewett , physics for scientists and engineers , edition th6 [↑](#footnote-ref-8)