مضاريب لاغرانج

د. سامي انجرو

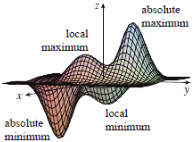
جامعة تشرين

25-2-2015

خطة العرض

1. القيم القصوى العظمى والصغرى
2. مضاريب لاغرانج مع شرط واحد
3. مضاريب لاغرانج مع شرطين

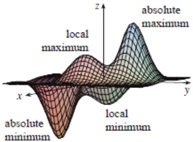
القيم القصوى العظمى والصغرى



تعريف 1

لتكن $f(x, y)$ دالة معرفة ومستمرة في منطقة ما R ولتكن (a, b) نقطة ما من هذه المنطقة، يقال أن للدالة f قيمة قصوى محلية في النقطة (a, b) إذا كان $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ من أجل جميع النقاط (x, y) في جوار النقطة (a, b)، وتسمى عندها القيمة $f(a, b)$ قيمة قصوى عظمى محلية، كما يقال أن للدالة f قيمة قصوى محلية في النقطة (a, b) إذا كان $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ من أجل جميع النقاط (x, y) في جوار النقطة (a, b)، وتسمى عندها القيمة $f(a, b)$ قيمة قصوى صغرى محلية.

القيم القصوى العظمى والصغرى



تعريف 1

لتكن $f(x, y)$ دالة معرفة ومستمرة في منطقة ما R ولتكن (a, b) نقطة ما من هذه المنطقة، يقال أن للدالة f قيمة قصوى محلية في النقطة (a, b) إذا كان $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ من أجل جميع النقاط (x, y) في جوار النقطة (a, b)، وتسمى عندها القيمة $f(a, b)$ قيمة قصوى عظمى محلية، كما يقال أن للدالة f قيمة قصوى محلية في النقطة (a, b) إذا كان $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ من أجل جميع النقاط (x, y) في جوار النقطة (a, b)، وتسمى عندها القيمة $f(a, b)$ قيمة قصوى صغرى محلية.

ملاحظة 1

إذا كانت المتراجحة السابقة صحيحة من أجل كل النقاط (x, y) من R عندها يكون للدالة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) مطلقة في النقطة (a, b) .

نظرية 1

إذا كان للدالة f قيمة قصوى (صغرى أو عظمى) محلية في نقطة ما (a, b) وكانت مشتقاتها الجزئية موجودة عندئذ فإن:

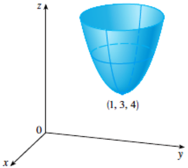
$$f'_x(a, b) = 0 \quad \& \quad f'_y(a, b) = 0$$

وتدعى النقطة (a, b) في هذه الحالة بالنقطة الحرجة.

مثال 1

أوجد القيم القصوى للدالة

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$



الحل:

$$f_x(x, y) = 2x - 2 = 0 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6 = 0 \quad \Rightarrow (1, 3) \Rightarrow f(1, 3) = 4$$

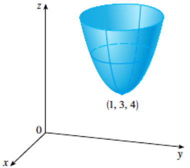
$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \quad \Rightarrow f(x, y) \geq 4 \quad ; \forall (x, y)$$

ومنه $f(1, 3) = 4$ قيمة قصوى صغرى محلية وبما أن $f(x, y) \geq f(1, 3)$ وذلك من أجل كل (x, y)، فإنها قيمة قصوى صغرى مطلقة.

مثال 1

أوجد القيم القصوى للدالة

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y+14$$



الحل:

$$f_x(x,y)=2x-2=0 \qquad f_y(x,y)=2y-6=0 \ \Rightarrow (1,3) \Rightarrow f(1,3)=4$$

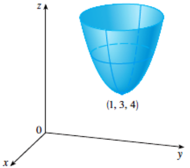
$$f(x,y)=4+(x-1)^2+(y-3)^2 \ \Rightarrow f(x,y)\geqslant 4 \ \ ;\forall(x,y)$$

ومنه $f(1,3)=4$ قيمة قصوى صغرى محلية وبما أن $f(x,y)\geqslant f(1,3)$ وذلك من أجل كل (x,y)، فإنها قيمة قصوى صغرى مطلقة.

مثال 1

أوجد القيم القصوى للدالة

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$



الحل:

$$f_x(x, y) = 2x - 2 = 0 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6 = 0 \ \Rightarrow (1, 3) \Rightarrow f(1, 3) = 4$$

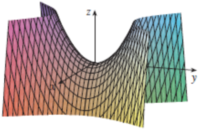
$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \ \Rightarrow f(x, y) \geqslant 4 \ ; \forall (x, y)$$

ومنه $f(1, 3) = 4$ قيمة قصوى صغرى محلية وبما أن $f(x, y) \geqslant f(1, 3)$ وذلك من أجل كل (x, y)، فإنها قيمة قصوى صغرى مطلقة.

مثال 2

أوجد القيم القصوى للدالة

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$



الحل:

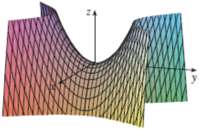
نقطة حرجة $f_x(x, y) = -2x = 0 \qquad f_y(x, y) = 2y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$$x = 0 \quad \Rightarrow f(x, y) = y^2 > 0 \qquad y = 0 \quad \Rightarrow f(x, y) = -x^2 < 0$$

مثال 2

أوجد القيم القصوى للدالة

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$



الحل:

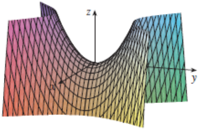
$$f_x(x,y) = -2x = 0 \qquad f_y(x,y) = 2y = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ نقطة حرجة}$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow f(x,y) = y^2 > 0 \qquad y = 0 \quad \Rightarrow f(x,y) = -x^2 < 0$$

مثال 2

أوجد القيم القصوى للدالة

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$



الحل:

$$f_x(x, y) = -2x = 0 \qquad f_y(x, y) = 2y = 0 \Rightarrow (0, 0)$$ نقطة حرجة

$$x = 0 \quad \Rightarrow f(x, y) = y^2 > 0 \qquad y = 0 \quad \Rightarrow f(x, y) = -x^2 < 0$$

نظرية 2

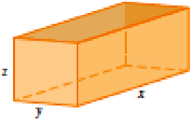
اختبار المشتقات من المرتبة الثانية
بفرض أن المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للدالة f موجودة ومستمرة على القرص الذي مركزه (a, b) ولنفرض أن $f_x(x, y) = 0$ و $f_y(x, y) = 0$ وليكن:

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$$

- إذا كان $D > 0$ و $f_{xx}(a, b) > 0$، فإن $f(a, b)$ قيمة قصوى محلية صغرى.
- إذا كان $D > 0$ و $f_{xx}(a, b) < 0$، فإن $f(a, b)$ قيمة قصوى محلية عظمى.
- إذا كان $D < 0$ ، فإن $f(a, b)$ ليست قيمة قصوى، وتكون في هذه الحالة (a, b) نقطة سرجية.

مثال 3

ليكن لدينا صندوق على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء، نحتاج لصناعته إلى $12m^2$ من الكرتون، أوجد أبعاد هذا الصندوق حتى يحوي أعظم ما يمكن.



الحل:

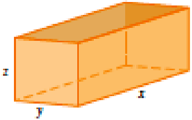
$$V = xyz$$

$$S = 2xz + 2yz + xy = 12 \quad \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

$$V = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)} = f(x, y)$$

مثال 3

ليكن لدينا صندوق على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء، نحتاج لصناعته إلى $12m^2$ من الكرتون، أوجد أبعاد هذا الصندوق حتى يحوي أعظم ما يمكن.



الحل:

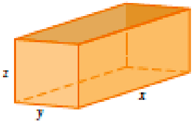
$$V = xyz$$

$$S = 2xz + 2yz + xy = 12 \quad \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

$$V = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)} = f(x, y)$$

مثال 3

ليكن لدينا صندوق على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء، نحتاج لصناعته إلى $12m^2$ من الكرتون، أوجد أبعاد هذا الصندوق حتى يحوي أعظم ما يمكن.



الحل:

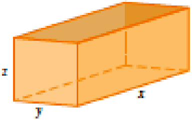
$$V = xyz$$

$$S = 2xz + 2yz + xy = 12 \quad \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

$$V = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)} = f(x, y)$$

مثال 3

ليكن لدينا صندوق على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء، نحتاج لصناعته إلى $12m^2$ من الكرتون، أوجد أبعاد هذا الصندوق حتى يحوي أعظم ما يمكن.



الحل:

$$V = xyz$$

$$S = 2xz + 2yz + xy = 12 \quad \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

$$V = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)} = f(x, y)$$

$$V'_x = \frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)} \quad , \quad V'_y = \frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2(12-2xy-x^2) = 0 \\ x^2(12-2xy-y^2) = 0 \end{cases}$$

- $x = y = 0 \Rightarrow V = 0$
- $\begin{cases} (12-2xy-x^2) = 0 \\ (12-2xy-y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1 \Rightarrow V = 4m^3$

$$V_{xx}(2,2) = -4 \ , \quad V_{yy}(2,2) = -4 \ , \quad V_{xy}(2,2) = -2$$

$$D(2,2) = 12 > 0 \quad , \quad V_{xx}(2,2) < 0$$

$$V'_x = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)} \quad , \quad V'_y = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2(12 - 2xy - x^2) = 0 \\ x^2(12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases}$$

- $x = y = 0 \Rightarrow V = 0$
- $\begin{cases} (12 - 2xy - x^2) = 0 \\ (12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1 \Rightarrow V = 4m^3$

$$V_{xx}(2,2) = -4 \ , \quad V_{yy}(2,2) = -4 \ , \quad V_{xy}(2,2) = -2$$

$$D(2,2) = 12 > 0 \quad , \quad V_{xx}(2,2) < 0$$

$$V'_x = \frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)} \quad , \quad V'_y = \frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2(12-2xy-x^2) = 0 \\ x^2(12-2xy-y^2) = 0 \end{cases}$$

- $x = y = 0 \Rightarrow V = 0$
- $\begin{cases} (12-2xy-x^2) = 0 \\ (12-2xy-y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1 \Rightarrow V = 4m^3$

$$V_{xx}(2,2) = -4 \ , \quad V_{yy}(2,2) = -4 \ , \quad V_{xy}(2,2) = -2$$

$$D(2,2) = 12 > 0 \quad , \quad V_{xx}(2,2) < 0$$

$$V'_x = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)} \quad , \quad V'_y = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2(12 - 2xy - x^2) = 0 \\ x^2(12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases}$$

- $x = y = 0 \Rightarrow V = 0$
- $\begin{cases} (12 - 2xy - x^2) = 0 \\ (12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1 \Rightarrow V = 4m^3$

$$V_{xx}(2,2) = -4 \ , \quad V_{yy}(2,2) = -4 \ , \quad V_{xy}(2,2) = -2$$

$$D(2,2) = 12 > 0 \quad , \quad V_{xx}(2,2) < 0$$

$$V'_x = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)} \quad , \quad V'_y = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2(12 - 2xy - x^2) = 0 \\ x^2(12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases}$$

- $x = y = 0 \Rightarrow V = 0$
- $\begin{cases} (12 - 2xy - x^2) = 0 \\ (12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1 \Rightarrow V = 4m^3$

$$V_{xx}(2,2) = -4 \ , \quad V_{yy}(2,2) = -4 \ , \quad V_{xy}(2,2) = -2$$

$$D(2,2) = 12 > 0 \quad , \quad V_{xx}(2,2) < 0$$

$$V'_x = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)} \quad , \quad V'_y = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2(12 - 2xy - x^2) = 0 \\ x^2(12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases}$$

- $x = y = 0 \Rightarrow V = 0$
- $\begin{cases} (12 - 2xy - x^2) = 0 \\ (12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1 \Rightarrow V = 4m^3$

$$V_{xx}(2,2) = -4 \ , \quad V_{yy}(2,2) = -4 \ , \quad V_{xy}(2,2) = -2$$

$$D(2,2) = 12 > 0 \quad , \quad V_{xx}(2,2) < 0$$

مضاريب لاغرانج مع شرط واحد

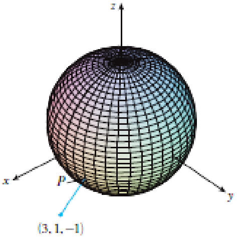
نظرية 3

تكون النقطة (a, b, c) نقطة قيمة قصوى للدالة $f(x, y, z) = c$ بشرط $g(x, y, z) = c$ إذا وجد عدد λ، يتحقق من أجله:

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y, z) &= \lambda g'_x(x, y, z) \\
f'_y(x, y, z) &= \lambda g'_y(x, y, z) \\
f'_z(x, y, z) &= \lambda g'_z(x, y, z) \\
g(x, y, z) &= c
\end{aligned}$$

مثال 4

لتكن النقطة $(3, 1, -1)$، أوجد النقاط التي على الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ الأقرب والأبعد إلى النقطة المعطاة.



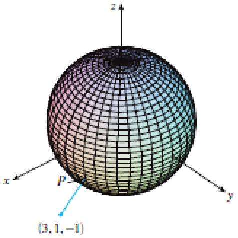
الحل:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

$$f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 \quad , \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

مثال 4

لتكن النقطة $(3, 1, -1)$، أوجد النقاط التي على الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ الأقرب والأبعد إلى النقطة المعطاة.



الحل:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

$$f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 \quad , \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$2(x-3) = 2x\lambda \Rightarrow x = \frac{3}{1-\lambda}$$
$$2(y-1) = 2y\lambda \Rightarrow y = \frac{1}{1-\lambda}$$
$$2(z+1) = 2z\lambda \Rightarrow z = \frac{-1}{1-\lambda}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

بتعويض قيمة كل من x وy وz في معادلة الكرة نحصل على:

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$M_1\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}})\right) \quad , \quad M_2\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

$$d_{M_1} = \sqrt{11} - 2 \quad , \quad d_{M_2} = \sqrt{11} + 2$$

الأقرب هي M_1 والأبعد هيM_2

$$2(x-3)=2x\lambda \Rightarrow x=\frac{3}{1-\lambda}$$
$$2(y-1)=2y\lambda \Rightarrow y=\frac{1}{1-\lambda}$$
$$2(z+1)=2z\lambda \Rightarrow z=\frac{-1}{1-\lambda}$$
$$x^2+y^2+z^2=4$$

بتعويض قيمة كل من x وy وz في معادلة الكرة نحصل على:

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$M_1\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{-2}{\sqrt{11}})\right) \quad , \quad M_2\left(\frac{-6}{\sqrt{11}},\frac{-2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

$$d_{M_1}=\sqrt{11}-2 \quad , \quad d_{M_2}=\sqrt{11}+2$$

الأقرب هي M_1 والأبعد هيM_2

مثال 5

ليكن لدينا مستطيل ما محيطه ثابت يساوي P، برهن أنه تكون مساحة هذا المستطيل أعظم ما يمكن عندما يكون مربعاً.

الحل:
لنفرض أن x و y هما بعدا المستطيل، بالتالي فإن:

$$f(x,y) = xy \quad , \quad g(x,y) = 2x + 2y = P$$

$$\begin{array}{ll} y = 2\lambda & (1) \\ x = 2\lambda & (2) \\ 2x + 2y = P & (3) \end{array}$$

بتعويض قيمة كل من x و y في المعادلة الثالثة:

$$\lambda = \frac{P}{8}$$

$$x = y = \frac{P}{4}$$

مثال 5

ليكن لدينا مستطيل ما محيطه ثابت يساوي P، برهن أنه تكون مساحة هذا المستطيل أعظم ما يمكن عندما يكون مربعاً.

الحل:
لنفرض أن x و y هما بعدا المستطيل، بالتالي فإن:

$$f(x,y) = xy \quad , \quad g(x,y) = 2x + 2y = P$$

$$\begin{array}{ll} y = 2\lambda & (1) \\ x = 2\lambda & (2) \\ 2x + 2y = P & (3) \end{array}$$

بتعويض قيمة كل من x و y في المعادلة الثالثة:

$$\lambda = \frac{P}{8}$$

$$x = y = \frac{P}{4}$$

مضاريب لاغرانج مع شرطين

نظرية 4

تكون النقطة (a, b, c) نقطة قيمة قصوى للدالة $f(x, y, z)$ بشرط $g(x, y, z) = c$ و $h(x, y, z) = k$ إذا وجد عددان λ و μ ، يتحقق من أجلهما:

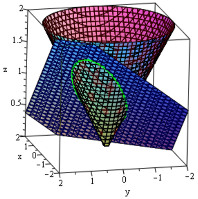
$$\begin{aligned}
f'_x(x, y, z) &= \lambda g'_x(x, y, z) + \mu h'_x(x, y, z) \\
f'_y(x, y, z) &= \lambda g'_y(x, y, z) + \mu h'_y(x, y, z) \\
f'_z(x, y, z) &= \lambda g'_z(x, y, z) + \mu h'_z(x, y, z) \\
g(x, y, z) &= c \\
h(x, y, z) &= k
\end{aligned}$$

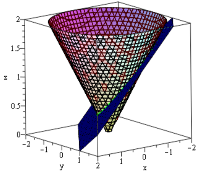
مثال 6

ليكن $z^2 = x^2 + y^2$ مخروط، فإذا قطعنا هذا المخروط بالمستوي:

$$4x - 3y + 8z = 5$$

أوجد أعلى نقطة وأخفض نقطة من القطع الناقص الناتج.





.

الحل:

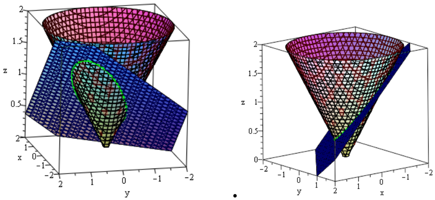
$$f(x,y,z) = z \quad , \quad g(x,y,z) = 4x - 3y + 8z = 5 \quad , \quad h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

مثال 6

ليكن $z^2 = x^2 + y^2$ مخروط، فإذا قطعنا هذا المخروط بالمستوي:

$$4x - 3y + 8z = 5$$

أوجد أعلى نقطة وأخفض نقطة من القطع الناقص الناتج.



الحل:

$$f(x, y, z) = z \quad , \quad g(x, y, z) = 4x - 3y + 8z = 5 \quad , \quad h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\begin{gathered}
-4\lambda - 2\mu x = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{-2\lambda}{\mu} \\
3\lambda - 2\mu y = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{3\lambda}{2\mu} \\
1 - 8\lambda + 2\mu z = 0 \quad \Rightarrow z = \frac{8\lambda - 1}{2\mu} \\
x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\
4x - 3y + 8z = 5
\end{gathered}$$

بتعويض قيمة كل من x وy وz في معادلة المستوي نحصل على:

$$\mu = \frac{39\lambda - 8}{10}$$

بالتعويض في معادلة المخروط:

$$39\lambda^2 - 16\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{13} \quad \Rightarrow \mu = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{4}{13} \ , \ y = \frac{-3}{13} \ , \ z = \frac{5}{13} \\ \lambda = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{-4}{3} \ , \ y = 1 \ , \ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

وبالتالي أعلى نقطة هي $\left(\frac{-4}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$ وأخفض نقطة هي $\left(\frac{4}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{5}{13}\right)$

$$\begin{aligned} -4\lambda - 2\mu x = 0 \quad &\Rightarrow x = \frac{-2\lambda}{\mu} \\ 3\lambda - 2\mu y = 0 \quad &\Rightarrow y = \frac{3\lambda}{2\mu} \\ 1 - 8\lambda + 2\mu z = 0 \quad &\Rightarrow z = \frac{8\lambda - 1}{2\mu} \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$4x - 3y + 8z = 5$$

بتعويض قيمة كل من x وy وz في معادلة المستوي نحصل على:

$$\mu = \frac{39\lambda - 8}{10}$$

بالتعويض في معادلة المخروط:

$$39\lambda^2 - 16\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{13} & \Rightarrow \mu = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{4}{13} \ , \ y = \frac{-3}{13} \ , \ z = \frac{5}{13} \\ \lambda = \frac{1}{3} & \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{-4}{3} \ , \ y = 1 \ , \ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

وبالتالي أعلى نقطة هي $\left(\frac{-4}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$ وأخفض نقطة هي $\left(\frac{4}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{5}{13}\right)$

$$-4\lambda - 2\mu x = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{-2\lambda}{\mu}$$
$$3\lambda - 2\mu y = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{3\lambda}{2\mu}$$
$$1 - 8\lambda + 2\mu z = 0 \quad \Rightarrow z = \frac{8\lambda - 1}{2\mu}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$
$$4x - 3y + 8z = 5$$

بتعويض قيمة كل من x وy وz في معادلة المستوي نحصل على:

$$\mu = \frac{39\lambda - 8}{10}$$

بالتعويض في معادلة المخروط:

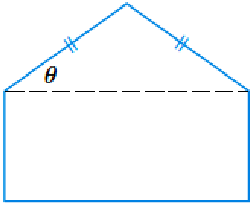
$$39\lambda^2 - 16\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{13} \quad \Rightarrow \mu = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{4}{13} \ , \ \ y = \frac{-3}{13} \ , \ \ z = \frac{5}{13} \\ \lambda = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{-4}{3} \ , \ \ y = 1 \ , \ \ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

وبالتالي أعلى نقطة هي $\left(\frac{-4}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$ وأخفض نقطة هي $\left(\frac{4}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{5}{13}\right)$

تمرين 1

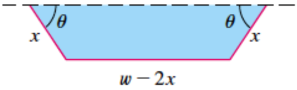
نضع مثلث متساوي الساقين فوق مستطيل مشكلين بذلك مخمس ذو محيط ثابت P ، أوجد أطوال أضلاع هذا المخمس حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن.



تمرين 2

لدينا صفيحة معدنية عرضها w ونريد تصميم مزراب مطر بحيث يكون مقطعه العرضي كما في الشكل المعطى.

- أوجد أبعاد التي تجعل هذا المزراب يمرر أكبر قدر من الماء.
- هل من الأفضل أن يصمم المزراب بحيث يكون مقطعه العرضي نصف دائري.



شكراً لحسن إصغائكم