النمذجة العددية وتطبيقاتها

د. أحمد خليفة

مخطط العرض

- تعريف بالنمذجة العددية
- مجال عمل النمذجة العددية
- أدوات النمذجة العددية
- مراحل النمذجة العددية
- تطبيق بسيط
- تطبيق صناعي

تعريف بالنمذجة العددية

- طريقة لتوصيف ظاهرة فيزيائية معينة باستخدام الحاسوب من أجل فهمها بشكل أفضل و من ثم توقع سلوكها

مجالات عمل النمذجة العددية

- الميكانيك
- المواد
- جريان الموائع
- تبادل حراري
- الكهرطيسية
- الطقس
- المناخ
- الكيمياء
- الفلك
- النووي
- الطيران
- الفيزياء النظرية
- الفيزياء الكمومية
- البيولوجيا
- الجودة والموثوقية
- ...

أدوات النمذجة العددية

- تتقارب نتائج النموذج العددي من الواقع حسب:
  - صحة النموذج الرياضي
  - الفرضيات
  - الشروط الحدية
  - الشروط الابتدائية

النموذج الرياضي

أدوات النمذجة العددية

- الخطوة الواصلة بين النموذج الرياضي والنموذج العددي
- تقسيم الوسط إلى أوساط صغيرة وتطبيق نتائج التحليل العددي
- اختيار خوارزميات برمجة ملائمة لطاقة الحواسيب

أدوات النمذجة العددية

- الأجهزة التي تدعم عملية الحسابات الخاصة بالنمذجة
- حجم الذاكرة الحية يؤثر مباشرة على حجم النموذج
- سرعة المعالجة تؤثر في زمن الحساب
- استعمال المعالجة على التوازي
- توزيع العمل عبر الشبكة على مجموعة كبيرة من الحواسيب متباعدة جغرافياً

إيجابيات النمذجة

- الجدوى الاقتصادية
- الأمان
- إمكانية التركيز على الظواهر الجزئية التي لا يمكن تحصيل نتائجها تجريبياً
- وسيلة مهمة لدعم آلية اتخاذ القرار

محدودية النمذجة

- بعض الظواهر ما زالت غير مفهومة بشكل يتيح تأطيرها في معادلات رياضية
- بعض الظواهر مركبة بشكل معقد بحيث لا تستطيع الحواسب المتوفرة حالياً حلها مجتمعة
- حدود نظرية وتقنية تتعلق بحجم النموذج وبالتالي زمن التشغيل

استثمار النمذجة العددية

- كما التجارب العملية، تستثمر تقنيات النمذجة العددية من قبل مختصين
- تتوفر في السوق برامج للنمذجة العددية سهلة الاستثمار نسبياً وتتطور باستمرار لتناسب طيف واسع من المسائل
- عند طرح مسألة جديدة يعاد بناء النموذج العددي

مراحل النمذجة العددية

- المعادلات الحاكمة للسلوك Governing Equations
- تقسيم الوسط الخاضع للدراسة Mesh وتمثيل التوابع بقيمها في نقاط منتهية العدد Discretisation
- كتابة المعادلات عددياً حسب الطريقة المستخدمة في النمذجة
- حل جملة المعادلات الناتجة عددياً
- إظهار النتائج

تطبيق بسيط
سلك متدلي

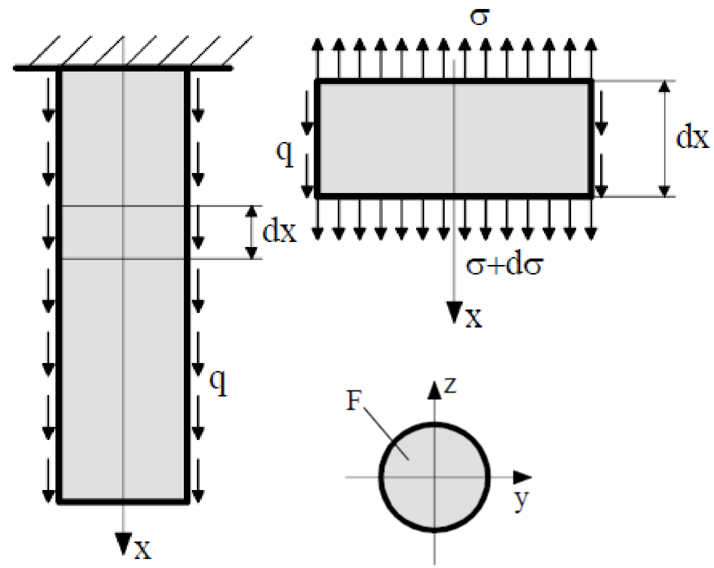
Governing Equations

$$\sum X = 0$$

$$-\sigma F + (\sigma + d\sigma)F + q dx = 0$$

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{du}{dx} E$$

$$\frac{d\sigma}{dx} F + q = 0$$



$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} EF + q = 0}$$

$$x = 0 : \quad u = 0$$

$$x = l : \quad \frac{du}{dx} = 0$$

تطبيق بسيط
سلك متدلي

الحل النظري

$$\frac{d^2u}{dx^2}EF + q = 0 \qquad u = -\frac{qx^2}{2EF} + C_1x + C_2$$

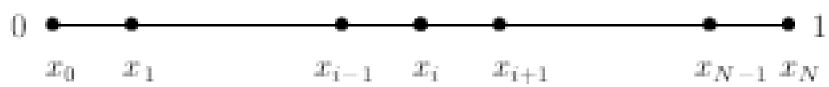
بتطبيق الشروط الحدية

$$C_2 = 0 \qquad C_1 = \frac{ql}{EF}$$

$$\boxed{u = -\frac{qx^2}{2EF} + \frac{qlx}{EF}}$$

تطبيق بسيط
سلك متدلي

Mesh & Discretisation



$$x_i = i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{1}{N}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

$$u_i \approx u(x_i)$$

تطبيق بسيط
سلك متدلي

- نشر تيلور

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_i$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(\Delta x)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \dots$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(\Delta x)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \dots$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \dots$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

تطبيق بسيط
سلك متدلي

كتابة المعادلات عددياً

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2}EF + q = 0}$$

$$x = 0: \quad u = 0$$

$$x = l: \quad \frac{du}{dx} = 0$$

$$f = \frac{q}{EF} = \frac{\rho g}{E}$$

$$\begin{array}{lll}
i = 1 & -\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{(\Delta x)^2} & = f_1 \\
i = 2 & -\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{(\Delta x)^2} & = f_2 \\
i = 3 & -\frac{u_2 - 2u_3 + u_4}{(\Delta x)^2} & = f_3 \\
 & \cdots &
\end{array}$$

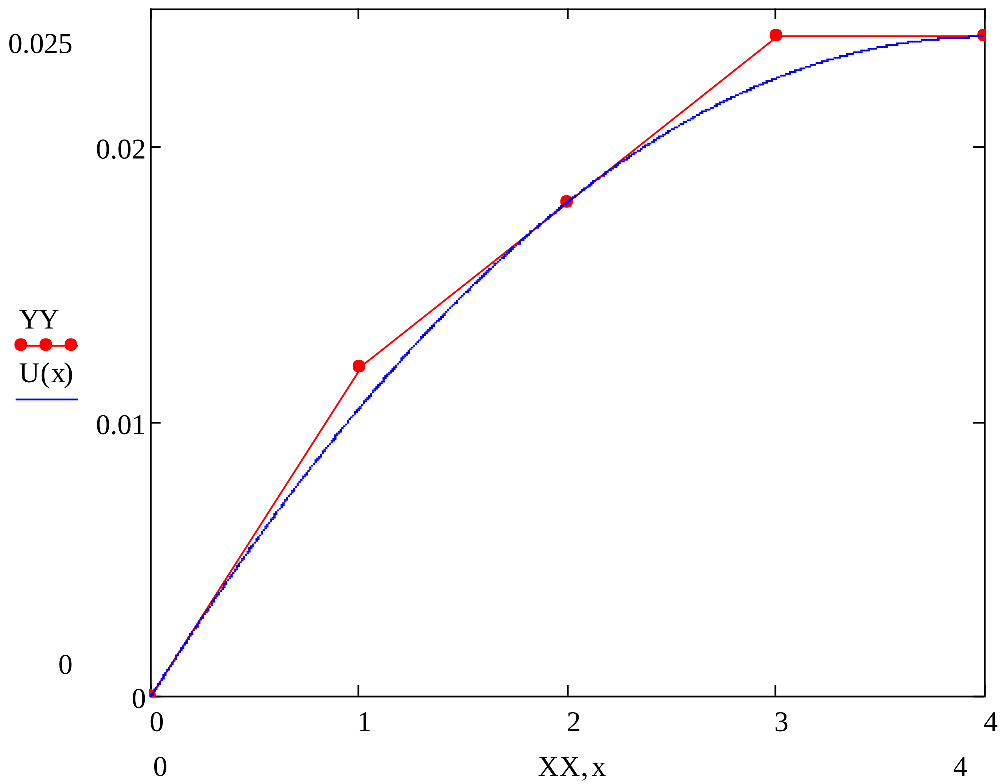
$$\boxed{Au = F}$$

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ f_{N-1} \\ \frac{1}{2} f_N \end{bmatrix}$$

تطبيق بسيط
سلك متدلي

المقارنة

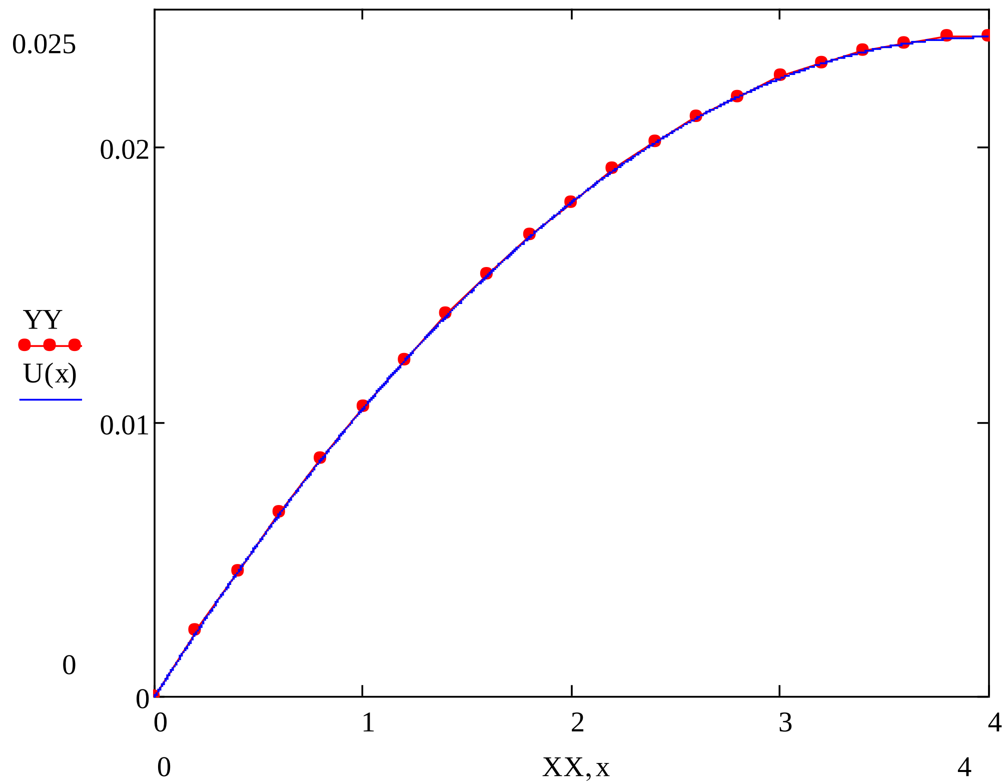
$$\rho = 300\frac{kg}{m^3} \quad g = 10\frac{m}{s^2} \quad E = 10^6 Pa \quad L = 4m \quad n = 4$$



تطبيق بسيط
سلك متدلي

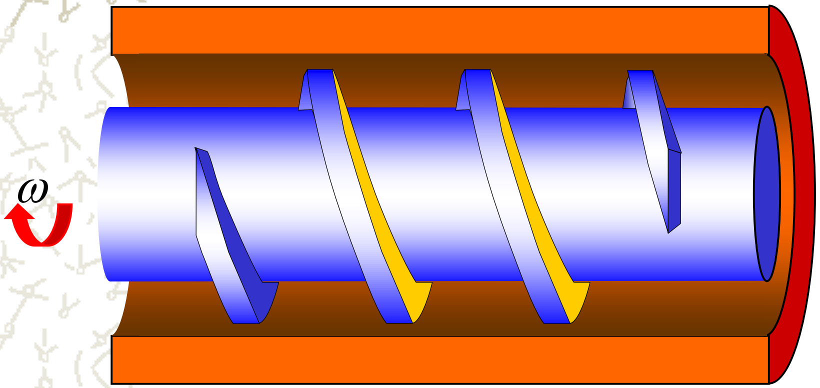
المقارنة

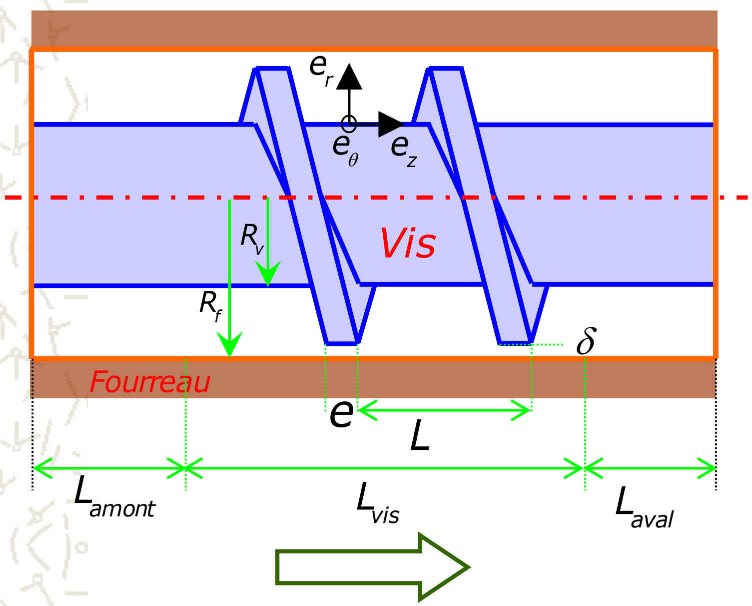
$$\rho = 300\frac{kg}{m^3} \quad g = 10\frac{m}{s^2} \quad E = 10^6 Pa \quad L = 4m \quad n = 20$$



تطبيق صناعي
حقن بوليمير

تعريف المسألة





- حقن بوليمير

بنية كيميائية جزيئاتها عبارة عن سلاسل طويلة
تسلك أثناء تعرضها للحركة بالنسبة لبعضها سلوكاً معقداَ يخلط بين سلوك السوائل العادية وتغير اللزوجة مع الحركة والحرارة بالإضافة إلى المرونة

تطبيق صناعي
حقن بوليمير

المعادلات الرياضية

☜ انحفاظ الكتلة لسائل غير قابل للانضغاط $\vec{\nabla}.\vec{v}=0$

☜ انحفاظ كمية الحركة

$$-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}.\bar{\tau}=-\rho\vec{v}.\nabla\vec{v}$$

$$-\vec{\nabla}p+2(1-\beta)\vec{\nabla}.(\eta_0\bar{D})=-\vec{\nabla}.\bar{S}-\rho\vec{v}.\nabla\vec{v}$$

☜ سلوك السائل أثناء الحركة

➢ PTT

$$\bar{\tau}=\underbrace{2\eta_s\bar{D}}_{\text{solvant}}+\underbrace{S}_{\text{polymère}}=2\eta_0(1-\beta)\bar{D}+S$$

$$\lambda\frac{\delta S}{\delta t}+gS=2\eta_{p0}D \qquad g=\exp\left(\frac{\lambda\varepsilon}{\eta_{p0}}tr\bar{S}\right)$$

$$\lambda\left(\frac{\partial\bar{S}}{\partial t}-(\bar{L}-\xi\bar{D})\bar{S}-\bar{S}(\bar{L}-\xi\bar{D})^T+\vec{v}.\vec{\nabla}\bar{S}\right)+g\bar{S}=2\beta\eta_0\bar{D}$$

☜ انحفاظ الطاقة

$$\rho C_p(\vec{v}.\nabla)T=-\kappa.\nabla^2T+\bar{\tau}:\bar{D}$$

☜ ارتباط المتحولات ببعضها بشكل كبير يفرض الحل دفعة واحدة

☜ حجم درجات الحرية يفرض الحل بطريقة التجزئة

تطبيق صناعي
حقن بوليمير

خوارزمية الحل

انحفاظ الكتلة وكمية الحركة : بمعرفة (S, T) إيجاد (v, p)

سلوك السائل أثناء الحركة : بمعرفة (S) إيجاد (v, T)

انحفاظ الطاقة: بمعرفة (v, S) إيجاد (T)

اختبار التقارب

عدم تقارب

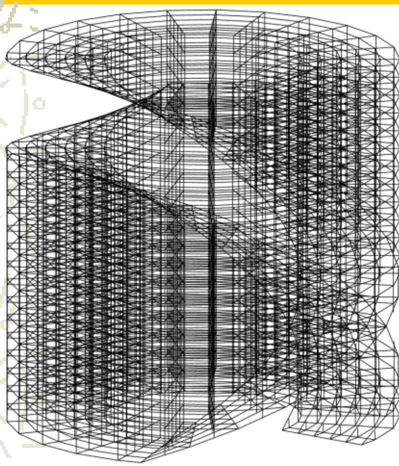
تقارب

إنهاء

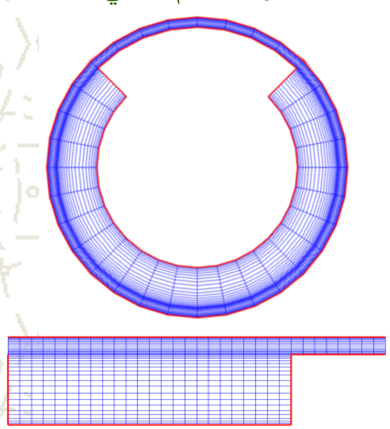
(3D, PTT) (≅ 1 000 000 ddl) (~شهر)

تطبيق صناعي
حقن بوليمير

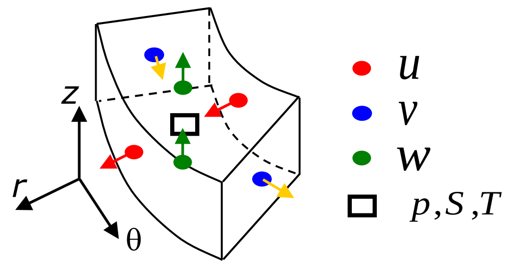
تقسيم الحيز وتوزع التوابع

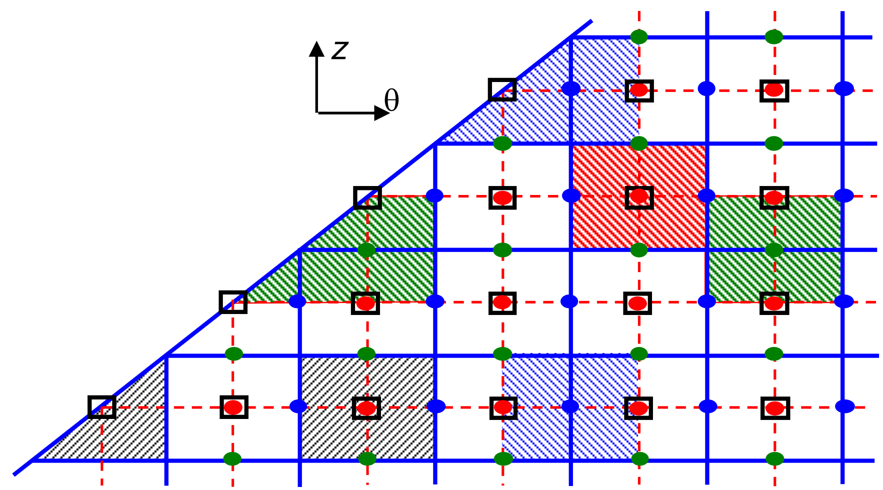


شكل الحيز المقسم ثلاثي الأبعاد



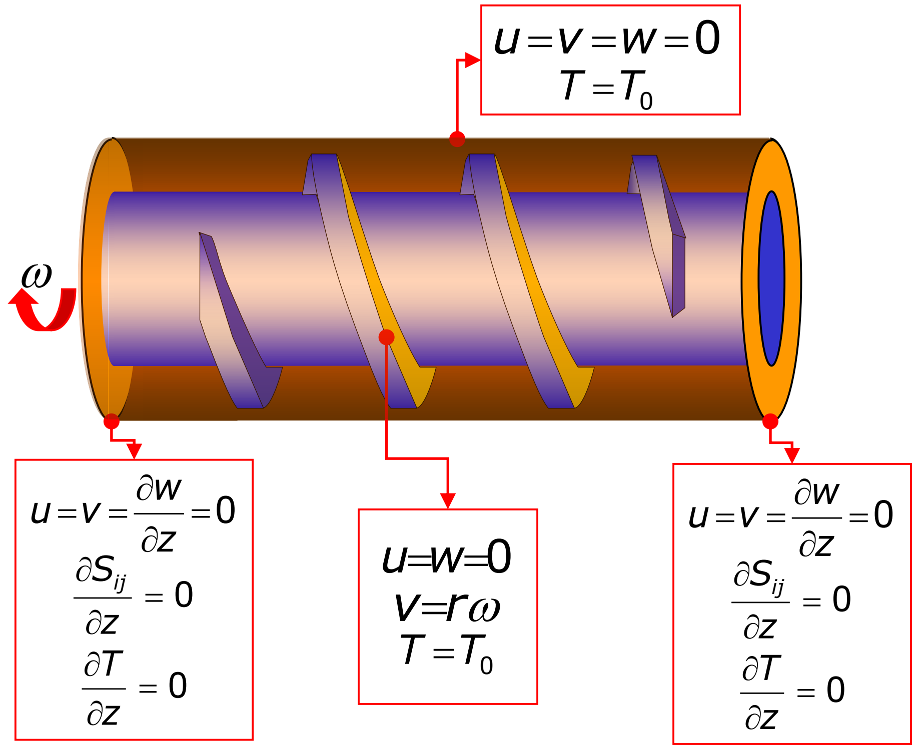
مساقط التقسيمات





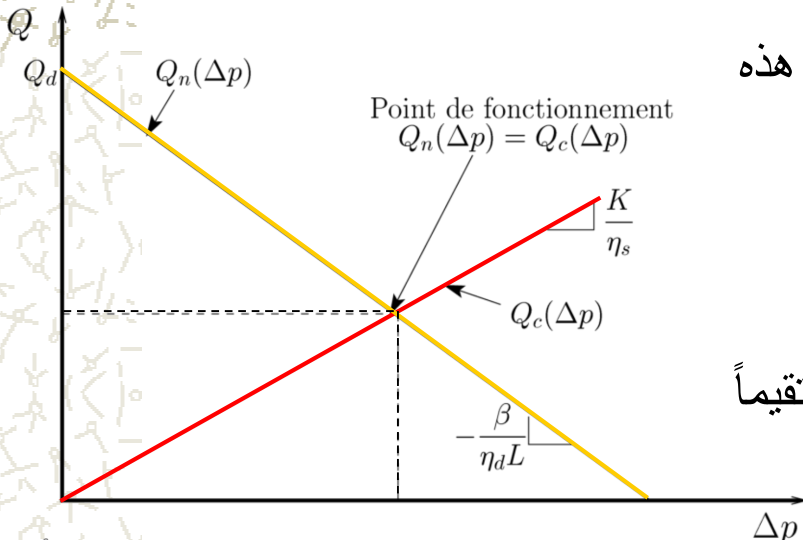
تطبيق صناعي
حقن بوليمير

الشروط الحدية



تطبيق صناعي
حقن بوليمير

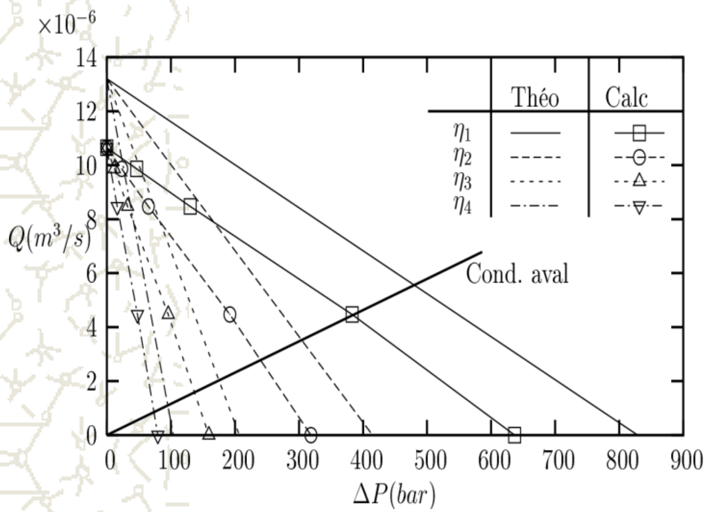
التحقق من مصداقية النمذجة



- المعلومات المتوفرة في الأدبيات عن تفاصيل هذه الحالة قليلة جداً وتتعلق بحالات خاصة

- آلة الحقن عبارة عن مضخة
- تميز بمنحني التدفق بدلالة الضغط $Q_n(\Delta p)$
- من أجل سائل مثالي يكون المنحني المميز مستقيماً

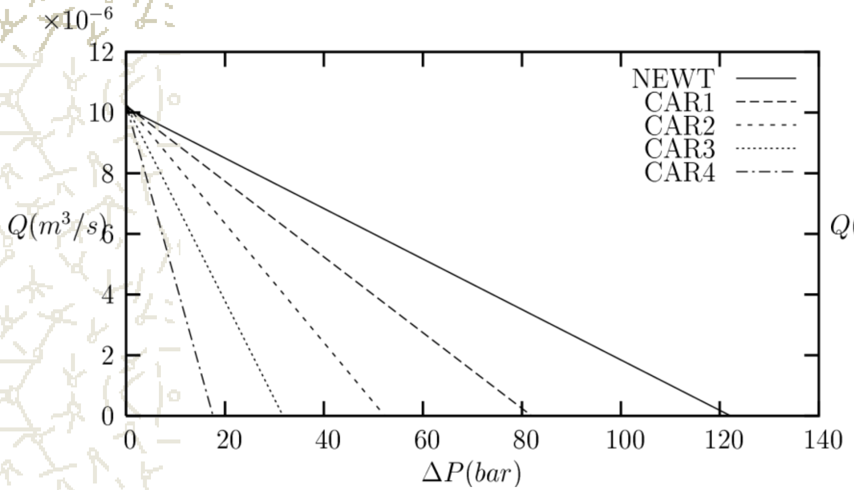
$$Q_n = \alpha\omega - \beta\frac{\Delta p}{\eta L}$$



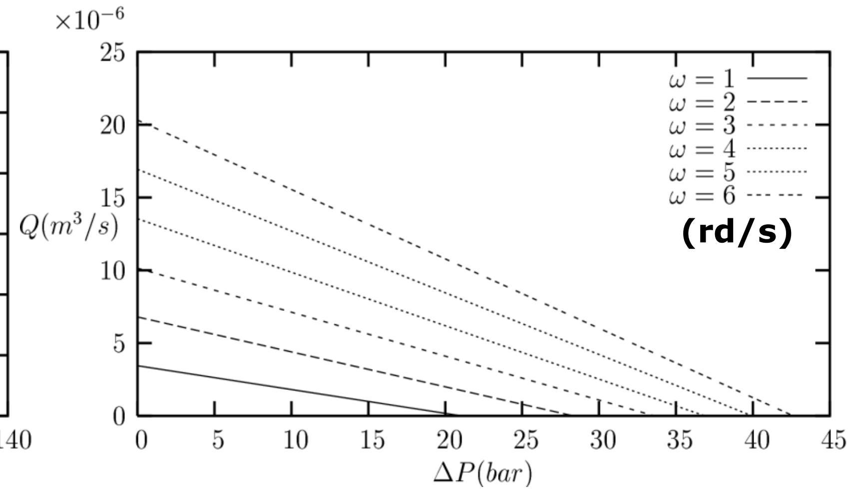
- بمقارنة نتائج النمذجة العددية مع الحساب النظري التقريبي

تطبيق صناعي
حقن بوليمير

التحقق من مصداقية النمذجة



تأثير تغير اللزوجة مع الحركة



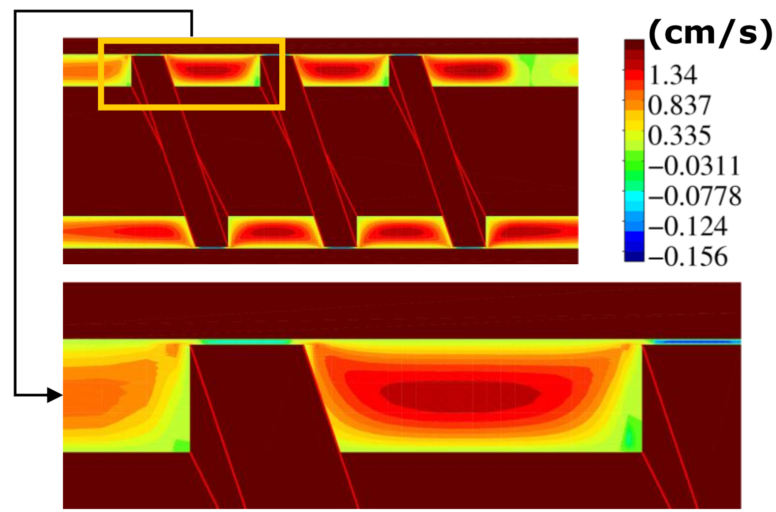
تأثير سرعة الدوران

- تتماشى النتائج تماماً مع الاتجاه النظري مع بعض الاختلافات التي تفسر بالتقريبات الكبيرة في النموذج الرياضي البسيط

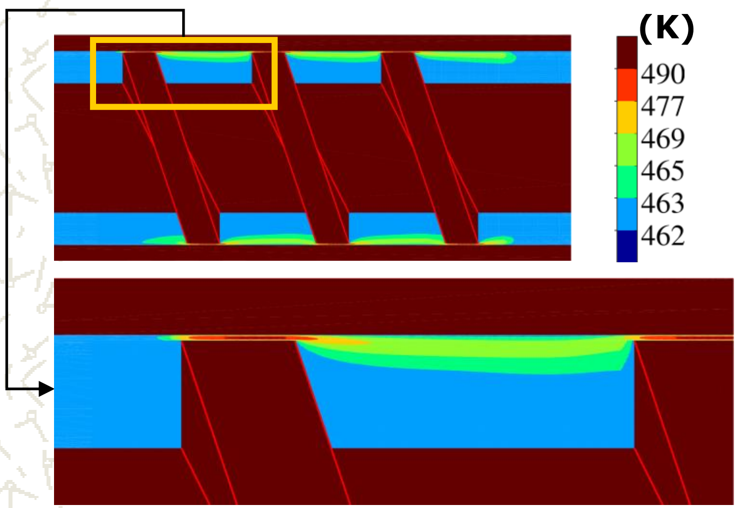
تطبيق صناعي
حقن بوليمير

بعض النتائج

- حقل السرعة المحورية



- حقل الحرارة



خلاصة

- النمذجة العددية أداة مهمة لفهم الظواهر الفيزيائية
- يجب دائماً تحليل النتائج ومقارنتها مع ما يتوفر من النتائج العملية أو النماذج الرياضية
- النمذجة العددية لا تغني بأي شكل من الأشكال عن التجارب العملية
- يمكن من خلال النمذجة العددية، كما التجارب العملية، المساهمة في تصحيح وتطوير النماذج الرياضية